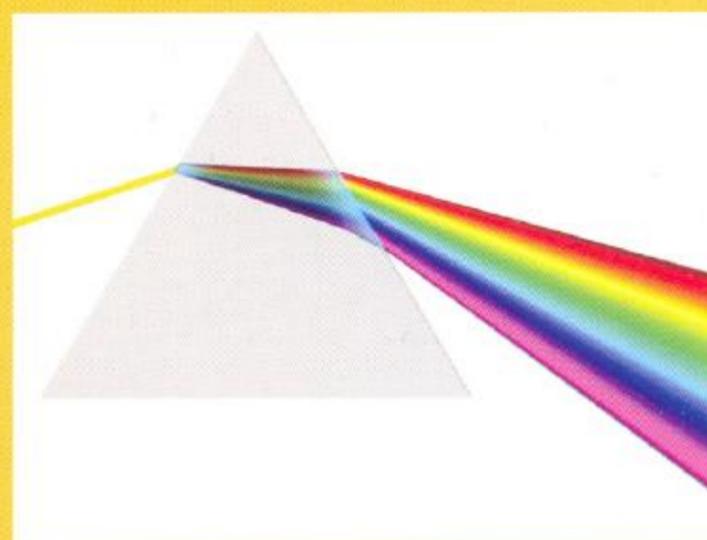
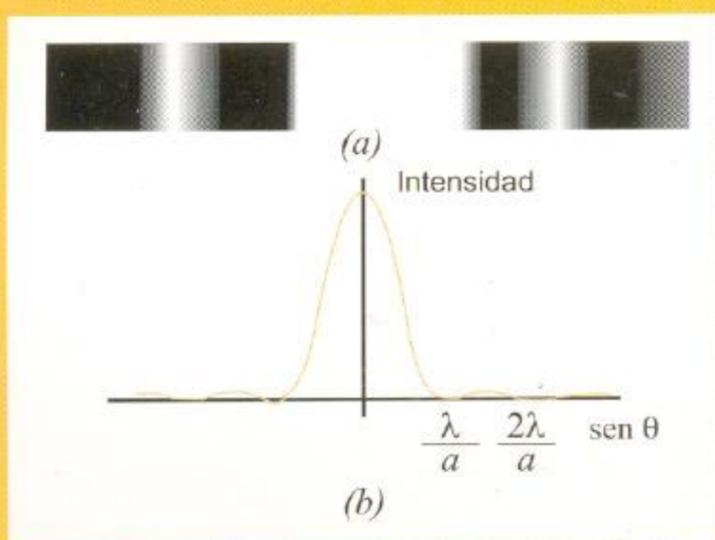
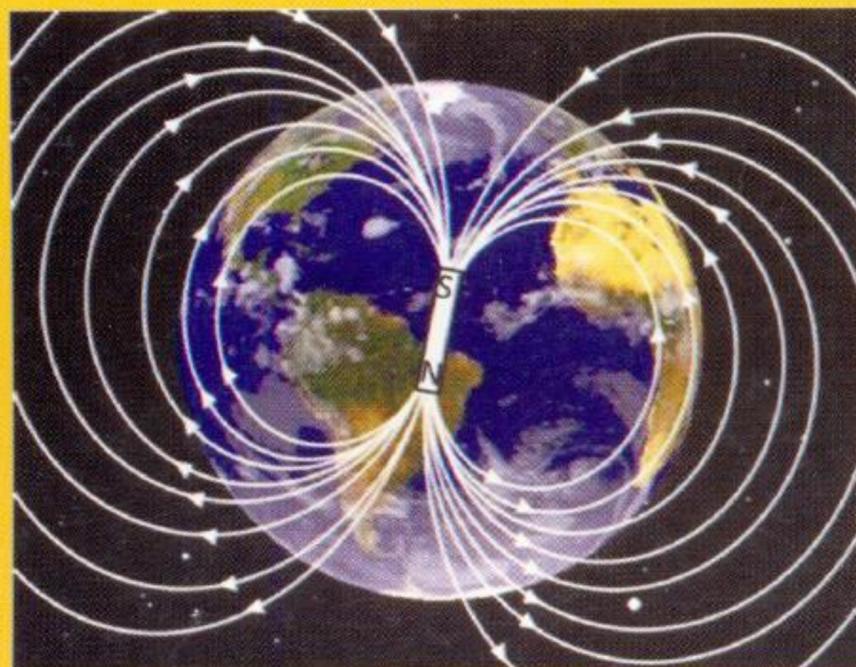


Lecciones de Física General



Genoveva Martínez López



FREELIBROS.ORG

LECCIONES DE FÍSICA GENERAL

Genoveva Martínez López

Dpto. Física Aplicada III, UCM

530.07
M385-1

Martínez López, Genoveva.

Lecciones de Física General / Genoveva Martínez López. -- León, Nic. : Editorial Universitaria, 2013.

1. FÍSICA-ESTUDIO Y ENSEÑANZA 2. MECÁNICA
3. TERMODINÁMICA 4. ELECTROMAGNETISMO 5.
ÓPTICA.

© Genoveva Martínez López

© Editorial Universitaria, UNAN-León.

ISBN: 978-99924-28-34-4

Impresión: Editorial Universitaria, UNAN-León.

Derechos reservados conforme a las leyes de la República de Nicaragua.

Editorial Universitaria, Iglesia La Recolección 85 vrs. al Oeste

Teléfono.: +505 (0) 2311 5013 Ext. 1061 / 1062

E-mail: editorial@unanleon.edu.ni

I. INTRODUCCIÓN

Este libro de Lecciones de Física General es el resultado del trabajo realizado dentro del Proyecto de cooperación al desarrollo “Profesionalización y Formación del Profesorado de Ciencias Naturales en la Región Centroamericana del Golfo de Fonseca”, A1/039448/11, financiado por la AECID y del programa FECINCA, entre las universidades UNAN-León, UES (El Salvador), UPNFM (Honduras), UAH (España) y UCM (España).

El objetivo de la presente edición es que pueda servir de ayuda a los profesores de Enseñanza Secundaria de los tres países centroamericanos para reforzar la componente teórica en la docencia de la Física.

Las unidades han sido escritas por la profesora Genoveva Martínez López y revisadas por la profesora Eloísa López Pérez (UCM).

II. DESCRIPCIÓN

Estas lecciones constan de seis unidades teóricas:

- La unidad 1 estudia la mecánica de la partícula. Se inicia con una revisión de las operaciones algebraicas vectoriales: suma, resta y productos escalar y vectorial (punto y cruz). Luego, se analiza el movimiento de la partícula, primero desde la perspectiva de la cinemática y luego, desde el punto de vista de la dinámica; se realiza también el análisis energético de sistemas mecánicos sencillos, a partir de los conceptos de trabajo, energía, potencia.
- La unidad 2 se dedica al estudio de los fluidos y su comportamiento. Se inicia estudiando las características de los estados de agregación de la materia, definiendo conceptos como la densidad. Luego, se estudian los fluidos en reposo (hidrostática) y se finaliza realizando una descripción de los fluidos en movimiento (hidrodinámica).
- La unidad 3 estudia la relación que existe entre energía, calor y temperatura. Se inicia definiendo los conceptos de temperatura y calor, y enunciado la ley cero de la termodinámica. Luego, se estudia el fenómeno de la expansión térmica y se revisan la transferencia de calor. También se estudia el comportamiento del gas ideal y se finaliza estudiando algunos procesos termodinámicos sencillos a partir de la aplicación de la primera ley de la termodinámica.
- La unidad 4 analiza el movimiento armónico simple y el movimiento ondulatorio, definiendo las características de cada uno y mostrando cómo aplicar el principio de superposición.
- La unidad 5 estudia los conceptos básicos de la electricidad, revisando las leyes fundamentales de la electrostática y la electrocinética. Luego, se hace un estudio de las propiedades magnéticas de la materia, iniciando con los imanes, y estudiando las leyes fundamentales del magnetismo. Esta unidad se finaliza con la revisión del funcionamiento de un generador eléctrico.

Lecciones de Física General

- La unidad 6 trata sobre los fenómenos ópticos y acústicos. Se inicia con la óptica geométrica, revisando las leyes de reflexión, refracción y dispersión. Luego, se desarrollan las leyes fundamentales de la óptica física a partir del estudio de los fenómenos de interferencia, difracción y polarización de la luz. Se finaliza con el análisis del sonido, estudiando fenómenos relacionados con la superposición de ondas sonoras y con la posición relativa de la fuente y el observador.

III. OBJETIVOS GENERALES

Con el desarrollo de estos contenidos se espera que el estudiante:

- 1) Refuerce y/o adquiera conocimientos sobre los conceptos fundamentales de física tratados a nivel de educación básica y media e identifique su relación con la realidad.
- 2) Desarrolle y/o retroalimente las técnicas para resolver problemas teóricos y prácticos de física.

IV. CONTENIDO DEL PROGRAMA

UNIDAD 1. MECÁNICA.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Describa el movimiento de una partícula en una o dos dimensiones, desde la perspectiva de la cinemática y de la dinámica.
- 2) Describa el estado de equilibrio mecánico de sistemas físicos simples.
- 3) Realice el análisis energético de sistemas sencillos.

Áreas temáticas de la unidad

1.1	Clasificación y características de las magnitudes físicas	15
1.2	Algebra vectorial	16
1.2.1	Suma y resta de vectores.	16
1.2.2	Productos: escalar por vector, escalar y vectorial (punto y cruz).	17
1.2.3	Sistemas de referencia. Componentes de un vector.	17
1.3	Cinemática de la partícula	19
1.3.1	Concepto de partícula, reposo y movimiento.	19
1.3.2	Magnitudes cinemáticas.	19
1.4	Movimiento en una dimensión	21
1.4.1	Movimiento con velocidad constante (MRU).	21
1.4.2	Movimiento con aceleración constante (MRUA).	22
1.4.3	Movimiento de caída libre.	23
1.5	Movimiento en dos dimensiones	24
1.5.1	Movimiento de proyectiles.	24
1.5.2	Movimiento circular uniforme (MCU).	25

Lecciones de Física General

1.6	Dinámica de la partícula	26
1.6.1	Conceptos fundamentales. Fuerzas e interacciones.	26
1.6.2	Composición de fuerzas. Clasificación.	26
1.7	Leyes de movimiento de Newton	27
1.8	Equilibrio estático	29
1.8.1	Concepto de cuerpo rígido. Centro de gravedad.	29
1.8.2	Momento de una fuerza.	29
1.8.3	Condiciones de equilibrio.	30
1.9	Fuerzas de rozamiento	30
1.10	Máquinas simples. Palancas	32
1.11	Trabajo y Energía	33
1.11.1	Concepto de trabajo físico. Trabajo de una fuerza variable. Potencia.	34
1.11.2	Energía: propiedades y clasificación.	35
1.11.3	Teorema del trabajo-energía.	37
1.12	Fuerzas conservativas y no conservativas	37
1.12.1	Función de energía potencial.	38
1.13	Conservación de la energía mecánica	38

UNIDAD 2. MECÁNICA DE FLUIDOS.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Conozca las características de los estados de agregación de la materia.
- 2) Descripción de un fluido en reposo y sus características.
- 3) Describa el flujo de fluidos ideales.

Áreas temáticas

2.1	Estados de agregación de la materia: Fluidos y sus características	40
2.2	Densidad de masa	40
2.3	Hidrostática	41
2.3.1	Concepto de presión: presión en un fluido.	41
2.3.2	Presión hidrostática. Principio de los vasos comunicantes.	41
2.3.3	Presión atmosférica.	43
2.4	Medición de la presión. Presión manométrica. Presión absoluta. Unidades	43
2.5	Principio de Pascal: Prensa hidráulica	45
2.6	Principio de Arquímedes	46
2.7	Hidrodinámica	46
2.7.1	Conceptos fundamentales: Flujo, clasificación y características.	47
2.7.2	Flujo de masa y flujo de volumen. Ecuación de continuidad.	48
2.8	Ecuación de Bernoulli	50

UNIDAD 3. TERMODINÁMICA.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Identifique la diferencia entre temperatura y calor.
- 2) Describa el comportamiento de los cuerpos cuando se modifica su temperatura.
- 3) Analice el balance calorimétrico de dos sistemas en contacto térmico.
- 4) Describa los mecanismos de transferencia de calor.

Áreas temáticas

3.1	Calor y Temperatura	52
3.2	Sistemas y variables termodinámicos	53

Lecciones de Física General

3.2.1	Sistemas termodinámicos.	53
3.2.2	Variables termodinámicas. Equilibrio termodinámico. Principio cero.	53
3.3	Medición de la temperatura: Termómetros y escala termométricas	54
3.4	Expansión térmica: Sólidos y líquidos	55
3.5	Calorimetría y cambios de fase	56
3.5.1	Capacidad calorífica y calor específico.	56
3.5.2	Calor latente y cambios de fase.	57
3.6	Mecanismos de transferencia de calor	58
3.6.1	Conducción.	58
3.6.2	Convección.	59
3.6.3	Radiación.	60
3.7	Equivalente mecánico del calor	60
3.8	Gas ideal: Propiedades y comportamiento	61
3.9	Energía interna de un sistema	64
3.10	Primer principio de la Termodinámica	65
3.11	Procesos (o transformaciones) termodinámicos	66
3.11.1	Proceso isobárico.	66
3.11.2	Proceso isotérmico.	66
3.11.3	Proceso isocórico.	67
3.11.4	Proceso adiabático.	67

UNIDAD 4. OSCILACIONES Y ONDAS.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Describa el movimiento armónico simple y la energía asociada.
- 2) Analice las características del movimiento ondulatorio.
- 3) Interprete el principio de superposición de ondas y el concepto de resonancia.

Áreas temáticas

4.1	Movimiento armónico simple	68
4.1.1	Sistemas que oscilan.	68
4.1.2	El oscilador armónico simple (MAS).	69
4.2	Energía del movimiento armónico simple	73
4.3	Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme	74
4.4	Ondas mecánicas: Clasificación	75
4.4.1	Longitud de onda, amplitud y velocidad de propagación.	76
4.4.2	Ecuación de onda.	77
4.5	Energía del movimiento ondulatorio	79
4.6	El principio de superposición	81
4.7	Interferencia de ondas	82
4.8	Ondas estacionarias y resonancia	83

UNIDAD 5. ELECTROMAGNETISMO.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Describa las propiedades del campo eléctrico.
- 2) Analice el funcionamiento de los circuitos eléctricos básicos.
- 3) Describa las propiedades de los imanes y del campo magnético creado por corrientes.
- 4) Analice el comportamiento de campos magnéticos que varían con el tiempo y sus aplicaciones.

Áreas temáticas

5.1	Naturaleza eléctrica de la materia	86
5.2	Carga eléctrica y principio de conservación	86
5.3	Electrostática	88
5.3.1	Ley de Coulomb.	88
5.3.2	Campo eléctrico.	89
5.3.3	Campos creados por distribuciones continuas de cargas.	91
5.3.4	Flujo de campo eléctrico: Ley de Gauss.	93
5.3.5	Energía potencial eléctrica. Potencial eléctrico.	96
5.3.6	Capacidad. Capacitores (o condensadores). Dieléctricos.	100
5.4	Corriente Eléctrica. Densidad de corriente	103
5.5	Ley de Ohm: conductividad, resistividad y resistencia	106
5.5.1	Resistencia de un conductor.	108
5.6	Circuitos eléctricos. Elementos	109
5.6.1	Fuentes de fuerza electromotriz (fem).	109
5.6.2	Ley de Joule.	110
5.6.3	Combinaciones de resistencias.	111
5.6.4	Descarga de un condensador a través de una resistencia.	112

5.7	Instrumentos de medida	113
5.7.1	Galvanómetro y amperímetro.	113
5.7.2	Voltímetro.	114
5.7.3	Óhmetro.	115
5.8	Magnetismo	115
5.8.1	Imanes naturales y artificiales.	117
5.8.2	Fuerza magnética sobre corrientes. Inducción magnética. Ley de Biot y Savart.	118
5.8.3	Fuerza sobre cargas en movimiento.	122
5.8.4	Flujo del vector inducción magnética.	123
5.9	Circulación del vector inducción magnética. Ley de Ampère	123
5.10	Inducción electromagnética. Ley de Faraday. Ley de Lenz	124
5.11	Generador eléctrico	125

UNIDAD 6. ÓPTICA Y ACÚSTICA.

Objetivos de la unidad

Que el estudiante:

- 1) Analice los fenómenos ópticos de reflexión, refracción y dispersión.
- 2) Describa los fenómenos ópticos de interferencia, difracción y polarización de la luz.
- 3) Interprete los fenómenos acústicos, como el efecto Doppler.

Áreas temáticas

6.1	Espectro electromagnético: Naturaleza de la luz	128
6.2	Óptica geométrica	129

Lecciones de Física General

6.2.1	Reflexión: Espejos.	129
6.2.2	Refracción: Lentes.	134
6.2.3	Dispersión: Prismas.	141
6.3	Óptica física	142
6.3.1	Interferencia: Experimento de Young.	142
6.3.2	Difracción: Difracción por una rendija.	145
6.3.3	Polarización.	148
6.4	Ondas sonoras: Propiedades	149
6.4.1	Ondas sonoras viajeras y velocidad del sonido.	150
6.4.2	Energía e intensidad de las ondas sonoras.	153
6.4.3	Interferencia de las ondas sonoras. Ondas sonoras estacionarias, modos normales y resonancia.	153
6.5	Sistemas vibratorios y fuentes de sonido	154
6.6	Efecto Doppler	156

V. BIBLIOGRAFÍA.

- (1) Tipler, Mosca. Física para la ciencia y la tecnología. 6ª Edición. Editorial Reverté. México 2010.
- (2) Resnick, Halliday, Krane. Física 5ª Edición. CECSA. México 2008.
- (3) Sears, Zemansky, Young, Freedman. Física universitaria. 12ª Edición. Editorial Pearson Educación. México 2009.
- (4) Serway y Faughn. Física. 5ª Edición. Editorial Pearson Educación. México 2001.

UNIDAD 1. MECÁNICA

1.1 Clasificación y características de las magnitudes físicas

Las leyes de la Física se basan en observaciones experimentales y se expresan mediante ecuaciones matemáticas. Estas ecuaciones relacionan entre sí distintas magnitudes, que pueden ser escalares o vectoriales, y que se cuantifican mediante el empleo de las unidades apropiadas.

Una magnitud *escalar* se expresa mediante *un número y la unidad correspondiente*: por ejemplo, una longitud de 200 m, un intervalo de tiempo de 15 s. Una magnitud *vectorial* se expresa mediante *un vector, con su módulo (magnitud), dirección y sentido*: por ejemplo, la aceleración de la gravedad tiene de módulo $9,81 \text{ m/s}^2$, dirección radial y sentido hacia el centro de la Tierra.

En 1960 se adoptó como sistema práctico de unidades el llamado Sistema Internacional de unidades, abreviado SI. Desde entonces se ha generalizado su uso en todos los planes de enseñanza, aunque cada país conserva otro tipo de unidades tradicionales para las que siempre existe una conversión a unidades SI. En dicho sistema se distinguen dos clases de unidades: *básicas y derivadas*. En la Tabla 1.1 se da la lista de unidades básicas y en la Tabla 1.2 algunos ejemplos de unidades derivadas.

Tabla 1.1: Unidades SI básicas.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo, duración	segundo	s
corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 1.2: Ejemplos de unidades SI derivadas expresadas a partir de las unidades básicas .

Nombre	Magnitud derivada		Unidad SI derivada	
	Símbolo		Nombre	Símbolo
área, superficie	A		metro cuadrado	m^2
volumen	V		metro cúbico	m^3
velocidad	v		Metro por segundo	m/s
carga eléctrica	q,e		A-s (Culombio)	C

Observamos que las unidades derivadas se forman a partir de productos de potencias de las unidades básicas.

Para generar los múltiplos y divisores de estas unidades se utiliza la siguiente Tabla 1.3 de símbolos:

Tabla 1.3: Prefijos SI.

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Ejemplos: una frecuencia de 2 gigahercios se expresa $2 \text{ GHz} = 2 \times 10^9 \text{ Hz}$; una capacidad eléctrica de 7 nanofaradios se expresa $7 \text{ nF} = 7 \times 10^{-9} \text{ F}$.

1.2 Álgebra vectorial

Un vector es un segmento orientado. El vector \vec{v} queda determinado por dos puntos: el *origen*, A , y el *extremo*, B . Su *dirección* es la recta en la que se encuentra y su *sentido* lo da la flecha que apunta desde A hasta B . Su *módulo* es la distancia entre A y B ; se expresa poniendo el vector entre barras $|\vec{v}|$, o bien el módulo sin la flecha de vector, v . Dos vectores son opuestos cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentidos opuestos.

1.2.1 Suma y resta de vectores

Para sumar dos vectores, \vec{u} y \vec{v} , se procede de la forma que se ilustra en la Figura 1.1. Para restar dos vectores se suma al primero el opuesto del segundo.

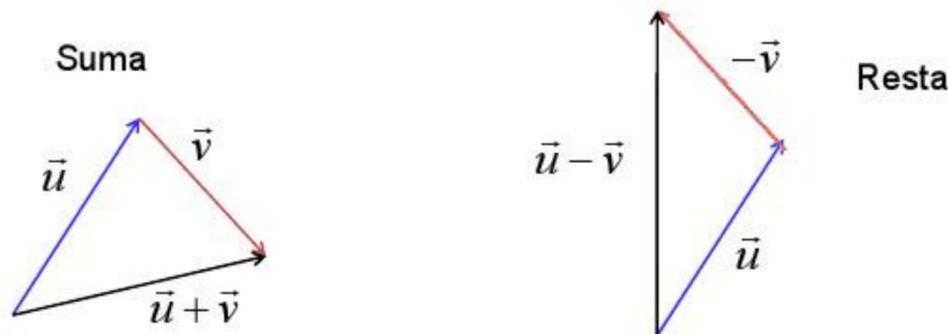


Figura 1.1: Suma y resta de vectores.

1.2.2 Productos

El producto de un *escalar*, a , por un *vector*, \vec{v} , es otro vector con la misma dirección y sentido y módulo $|a\vec{v}|$. La combinación de esta operación con la suma o resta, permite obtener vectores de la forma $\vec{s} = a\vec{u} \pm b\vec{v}$, que son combinaciones lineales de los anteriores.

El *producto escalar* de dos vectores, \vec{u} y \vec{v} , se define mediante la operación:

$$p = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

siendo α el ángulo que forman los vectores. De esta definición se deduce el ángulo que forman dichos vectores, $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

El *producto vectorial* de dos vectores, \vec{u} y \vec{v} , es otro vector $\vec{q} = \vec{u} \times \vec{v}$ con las siguientes características: 1) Módulo $|\vec{q}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$; 2) Dirección perpendicular al plano definido por \vec{u} y \vec{v} ; 3) Sentido dado por la regla del tornillo: se lleva \vec{u} a coincidir con \vec{v} por el ángulo *más corto* y el movimiento del giro del tornillo nos da el sentido.

1.2.3 Sistema de referencia. Componentes de un vector

En Física el sistema de referencia más utilizado es el cartesiano, definido por un origen O y tres ejes perpendiculares entre sí: OX, OY, OZ. Sobre estos ejes se sitúan los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, de módulo igual a 1, como se ilustra en la Figura 1.2.

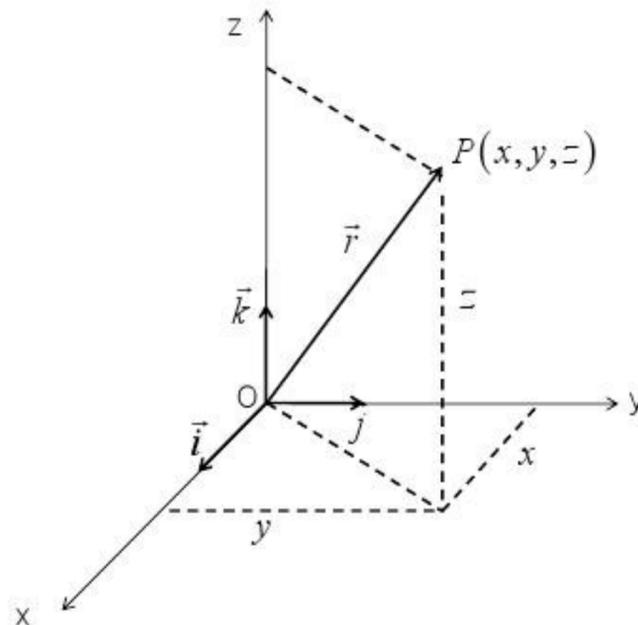


Figura 1.2: Sistema de ejes cartesianos y vector posición del punto P.

El vector posición de un punto P es el que tiene por origen el del sistema de referencia y por extremo dicho punto. Se expresa como.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

De esta manera se ha descompuesto el vector \vec{r} en sus componentes. Esto permite definir de otra forma más práctica las operaciones con vectores.

Suma de vectores: dados $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, su suma será la suma de las componentes en cada dirección, $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$. La resta se obtiene sumando al vector \vec{a} el opuesto del vector \vec{b} (\Rightarrow se restan las componentes).

Producto de un vector por un escalar: $c\vec{a} = ca_x\vec{i} + ca_y\vec{j} + ca_z\vec{k}$

Producto escalar de dos vectores: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Módulo de un vector: $|\vec{a}| = +\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Producto vectorial de dos vectores:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Ejemplo:

Sean los vectores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$. Aplicando las reglas anteriores se tiene:

**Suma* $\vec{a} + \vec{b} = (1+2)\vec{i} + (2+(-5))\vec{j} + (-4+1)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$

**Resta* $\vec{a} - \vec{b} = (1-2)\vec{i} + (2-(-5))\vec{j} + (-4-1)\vec{k} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

**Producto* $7\vec{a} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 28\vec{k}$

**Producto escalar* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 10 - 4 = -12$ (el resultado es un escalar)

**Módulo* $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$; $|\vec{b}| = \sqrt{30}$

**Producto vectorial*

$$\vec{a} \times \vec{b} = [2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)]\vec{i} + [(-4) \cdot 2 - (1) \cdot (1)]\vec{j} + [(1) \cdot (-5) - (2) \cdot (2)]\vec{k} = -18\vec{i} - 9\vec{j} - 9\vec{k}$$

1.3 Cinemática de la partícula

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento prescindiendo de las causas que lo producen. Las observaciones deben realizarse midiendo respecto a sistemas de referencia. Nosotros vamos a utilizar el sistema cartesiano representado en la Figura 1.2.

1.3.1 Concepto de partícula, reposo y movimiento

Idealmente, en cinemática un cuerpo se representa por una partícula puntual (o punto) cuya posición en cada instante viene dada por tres coordenadas, $P(x, y, z)$, y, respecto del origen de coordenadas, por su *vector posición*, \vec{r} .

Movimiento es un cambio continuo en la posición, que es por tanto función del tiempo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de movimiento*.

Si $P(x, y, z)$ permanece fijo, se dice que el cuerpo está en *reposo*.

1.3.2 Magnitudes cinemáticas

Vector desplazamiento: Une la posición \vec{r}_0 correspondiente al instante t con la posición \vec{r}_1 en el instante $t + \Delta t$, como se ve en la Figura 1.3.

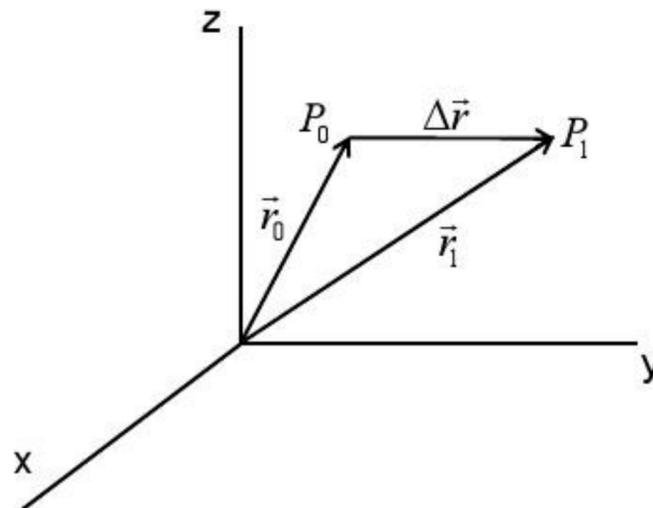


Figura 1.3: Vector desplazamiento.

De acuerdo con este diagrama, vemos que $\Delta\vec{r}$ viene dado por:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

Velocidad media: Desplazamiento que experimenta un punto móvil en la unidad de tiempo. Para el intervalo entre los instantes t y $t + \Delta t$ se expresa como el cociente:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

Velocidad instantánea:

Es la velocidad que posee un punto móvil en un instante determinado. Matemáticamente representa la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

Vemos que la velocidad instantánea en un punto $P(x, y, z)$ es un vector que se obtiene derivando el vector posición con respecto al tiempo. Su dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto y el sentido coincide con el del movimiento, como se ilustra en la Fig. 1.4.

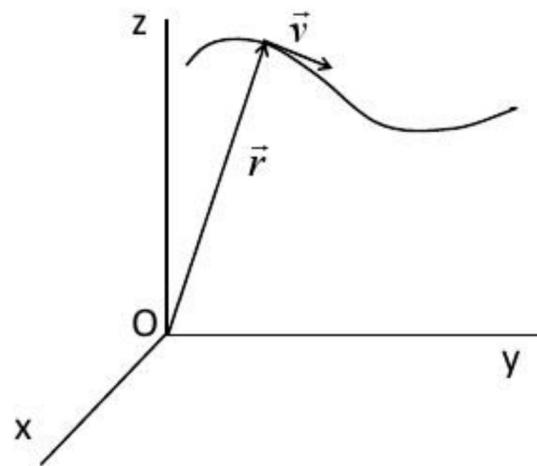


Figura 1.4: La velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria.

Aceleración media:

Representa la variación de la velocidad en la unidad de tiempo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \vec{k}$$

Aceleración instantánea:

Es la aceleración que tiene un punto móvil en cualquier instante. Matemáticamente representa la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Es un vector que se obtiene derivando el vector velocidad con respecto al tiempo.

Componentes intrínsecas de la aceleración

A cualquier punto de la trayectoria le podemos asociar un sistema de referencia formado por un eje tangente a la trayectoria en dicho punto y otro perpendicular a la misma, Figura 1.5. Dicho sistema de referencia es, por tanto, intrínseco a la trayectoria.

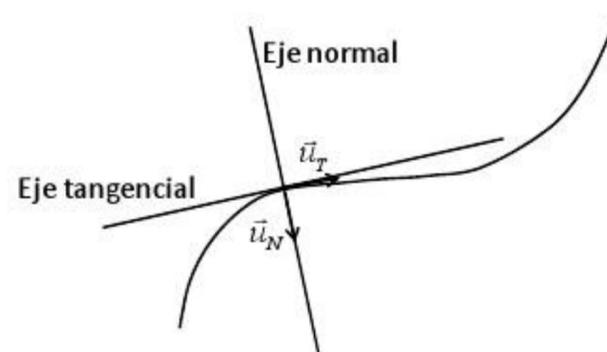


Figura 1.5: Sistema de referencia asociado a cada punto. Vectores unitarios \vec{u}_N y \vec{u}_T .

En este sistema de referencia, la aceleración instantánea posee en cada punto dos componentes: un tangencial, \vec{a}_T , y otra normal (perpendicular) o centrípeta, \vec{a}_N .

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$$

La componente tangencial indica cómo varía el módulo de la velocidad:

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

La componente normal nos da cómo varía la dirección del vector velocidad. Se calcula a partir de la expresión.

$$a_N = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

siendo R el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto (para una trayectoria circular, el radio de curvatura coincide con el radio de la circunferencia que describe).

1.4 Movimiento en una dimensión

Es el caso más simple de analizar. Suponemos que la partícula se mueve únicamente a lo largo de un eje.

1.4.1 Movimiento con velocidad constante (MRU)

Cuando la trayectoria que describe un móvil es una línea recta y la velocidad con que se mueve constante, el movimiento es *rectilíneo uniforme* (MRU).

Puesto que en este caso $\Delta \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$; la aceleración es nula.

También se cumple que la velocidad media y la instantánea son iguales; ello permite deducir de forma sencilla la ecuación de movimiento:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

Si suponemos que el movimiento es a lo largo del eje OX , como todos los vectores tienen la misma dirección, la ecuación de movimiento se reduce a la expresión escalar:

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Lo que nos da la posición en cualquier instante, siempre que se conozca la posición inicial, x_0 , en el instante t_0 . Normalmente se elige $t_0 = 0$, quedando:

$$x = x_0 + vt$$

Si dibujamos la posición en función del tiempo se obtiene una recta de pendiente v y ordenada en el origen x_0 . Por ejemplo, para $x_0 = 2\text{m}$, $v = 10\text{ m/s}$, la gráfica es la de la Fig. 1.6:

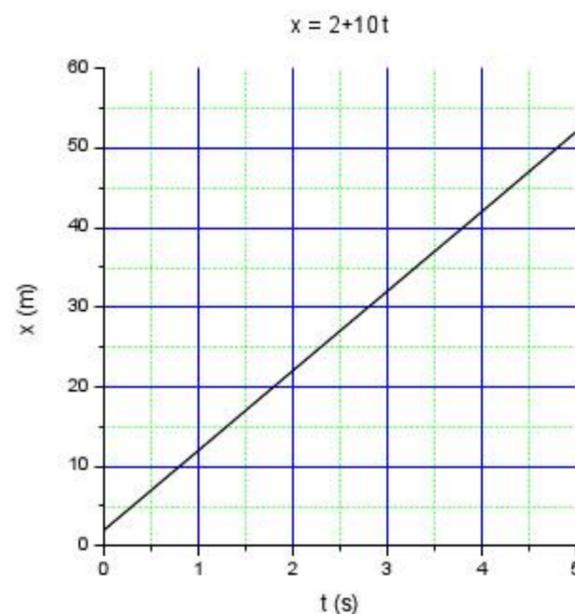


Figura 1.6: Representación gráfica de la posición en función del tiempo en un MRU.

1.4.2 Movimiento con aceleración constante (MRUA)

Si una partícula se mueve en línea recta y su velocidad varía uniformemente, la aceleración será constante. Decimos que el movimiento es *rectilíneo uniformemente acelerado* (MRUA).

En este caso coinciden la aceleración media y la instantánea:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}(t - t_0)$$

Al igual que hemos hecho con el MRU, si el movimiento es a lo largo del eje OX la ecuación de la velocidad se puede expresar escalarmente:

$$v - v_0 = a(t - t_0) \rightarrow v = v_0 + a(t - t_0)$$

La segunda ecuación nos permite hallar la velocidad del móvil en cualquier instante, siempre que sea conocida la velocidad inicial, v_0 , en el instante t_0 . Normalmente se elige $t_0 = 0$,

$$v = v_0 + at$$

que es la ecuación de una recta de pendiente a y ordenada en el origen v_0 . Recordando que la relación entre velocidad y posición es para este caso $v = \frac{dx}{dt}$, la posición viene dada por:

$$dx = v dt, \quad \text{Integrando} \rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

donde x_0 es la posición del móvil en el instante inicial, $t_0 = 0$. Como ejemplo vamos a representar gráficamente, en la Figura 1.7, el caso $x_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $a = 2 \text{ m/s}^2$.

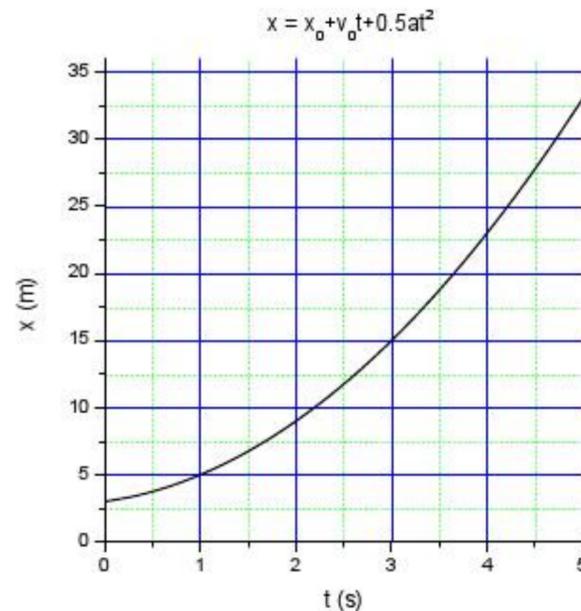


Figura 1.7: Representación gráfica de la posición en función del tiempo en un MRUA.

Vemos que la gráfica es una parábola cuya ordenada en el origen es x_0 , y cuya curvatura es positiva. En el caso $a < 0$, deceleración, la curvatura sería negativa.

1.4.3 Movimiento en caída libre

Es un caso particular de MRUA en el que la aceleración es la de la gravedad, g . Por conveniencia, el movimiento se toma a lo largo del eje OY , con g cambiada de signo puesto que está dirigida hacia el centro de la Tierra, es decir, en el sentido del eje OY negativo.

Para un cuerpo que cae desde una altura y_0 con $v_0 = 0$:

$$v = -gt, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Si se lanza con una v_0 hacia abajo la caída vendrá dada por.

$$v = -v_0 - gt, \quad y = y_0 - v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

También es fácil analizar otros casos, como el lanzamiento hacia arriba y posterior caída de un móvil.

1.5 Movimiento en dos dimensiones

Vamos a estudiar el caso en que la partícula se mueve en un plano. Ahora las ecuaciones que describen el movimiento tienen carácter vectorial y se pueden analizar por componentes.

1.5.1 Movimiento de proyectiles

El más sencillo es el *tiro horizontal*, cuando la velocidad inicial sólo tiene componente x . Suponiendo que lanzamos el proyectil con $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$, se tiene para cualquier instante:

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = v_0\vec{i} - gt\vec{j}$$

La posición en cualquier instante viene dada por:

$$\left. \begin{array}{l} x = v_0t \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{r} = v_0t\vec{i} + \left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \right)\vec{j}$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo ($y = 0$) será:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

que es independiente de la velocidad con que se lanza en la dirección x .

Podemos despejar t en función de x y sustituir su valor en la ecuación para y :

$$t = \frac{x}{v_0}, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2$$

Observamos que la partícula describe en el espacio una parábola.

En el *tiro oblicuo* la velocidad inicial forma un ángulo arbitrario, α , con el eje horizontal; entonces

$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{i} + v_0 \sin \alpha \vec{j}$. Procediendo como en el caso anterior queda para la velocidad:

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt \end{array} \right\} \rightarrow \vec{v} = v_0 \cos \alpha \vec{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \vec{j}$$

y para la posición:

$$\left. \begin{array}{l} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{r} = (v_0 \cos \alpha)t \vec{i} + \left(y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \vec{j}$$

1.5.2 Movimiento circular uniforme (MCU)

Movimiento circular uniforme (MCU) es el realizado por una partícula que describe una trayectoria a lo largo de una circunferencia manteniendo el módulo de su velocidad constante. Aunque la velocidad no cambia de valor, sí lo hace su dirección, ya que ésta es siempre tangente al punto de la trayectoria en el que se encuentra la partícula. Por tanto:

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0; \quad a_N = \frac{v^2}{r}$$

siendo r el radio de la circunferencia. Al ser un movimiento uniforme, la expresión que permite calcular la distancia recorrida Δs en el intervalo de tiempo Δt será (Figura 1.8):

$$\Delta s = v \Delta t,$$

y la distancia recorrida por el móvil en función del tiempo:

$$s = s_0 + v(t - t_0)$$

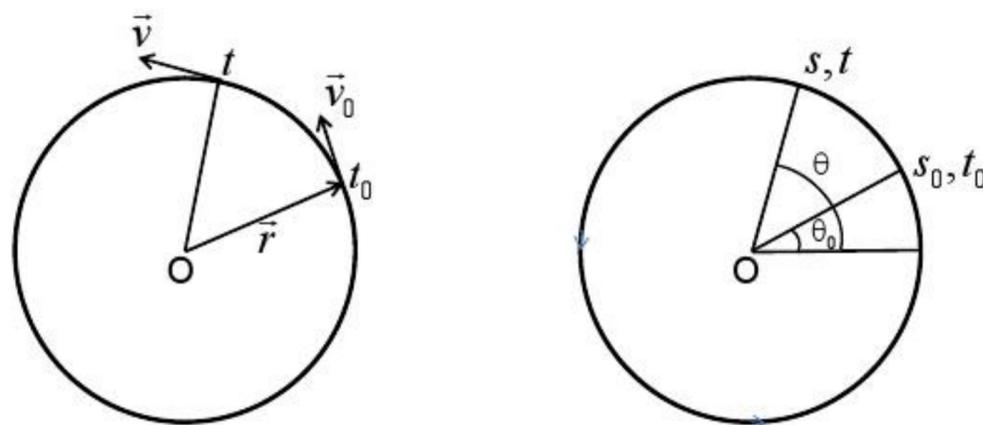


Figura 1.8: Movimiento circular uniforme: $|\vec{v}_0| = |\vec{v}| = v$.

Es conveniente expresar este movimiento en función del ángulo θ (rad) que forma el vector posición \vec{r} en función del tiempo. El arco recorrido para un $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ es:

$$\Delta s = r \Delta\theta$$

Por tanto podemos poner,

$$v\Delta t = r\Delta\theta \rightarrow v = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Haciendo tender a cero el intervalo de tiempo en el cociente $\Delta\theta / \Delta t$, queda

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

que se denomina *velocidad angular*. En el SI se mide en rad/s. También se utilizan en la vida cotidiana otras unidades, por ejemplo revoluciones o vueltas por minuto (r.p.m.). Finalmente el ángulo descrito en función del tiempo viene dado por:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Este ángulo se mide en radianes.

1.6 Dinámica de la partícula

La Dinámica es la parte de la Mecánica que relaciona el movimiento con las causas que lo producen.

1.6.1 Conceptos fundamentales: Fuerzas e interacciones

La fuerza es la magnitud física que caracteriza la intensidad de la interacción entre dos sistemas o entre las partículas que los componen. Las interacciones son de dos tipos: a) por contacto y b) a distancia. En estas secciones vamos a centrarnos en el estudio de las primeras, incluyendo los casos de rozamiento.

Un aspecto esencial es que *la fuerza es un vector* que vendrá caracterizada por su módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. En el SI la unidad de fuerza es el newton (N).

1.6.2. Composición de fuerzas

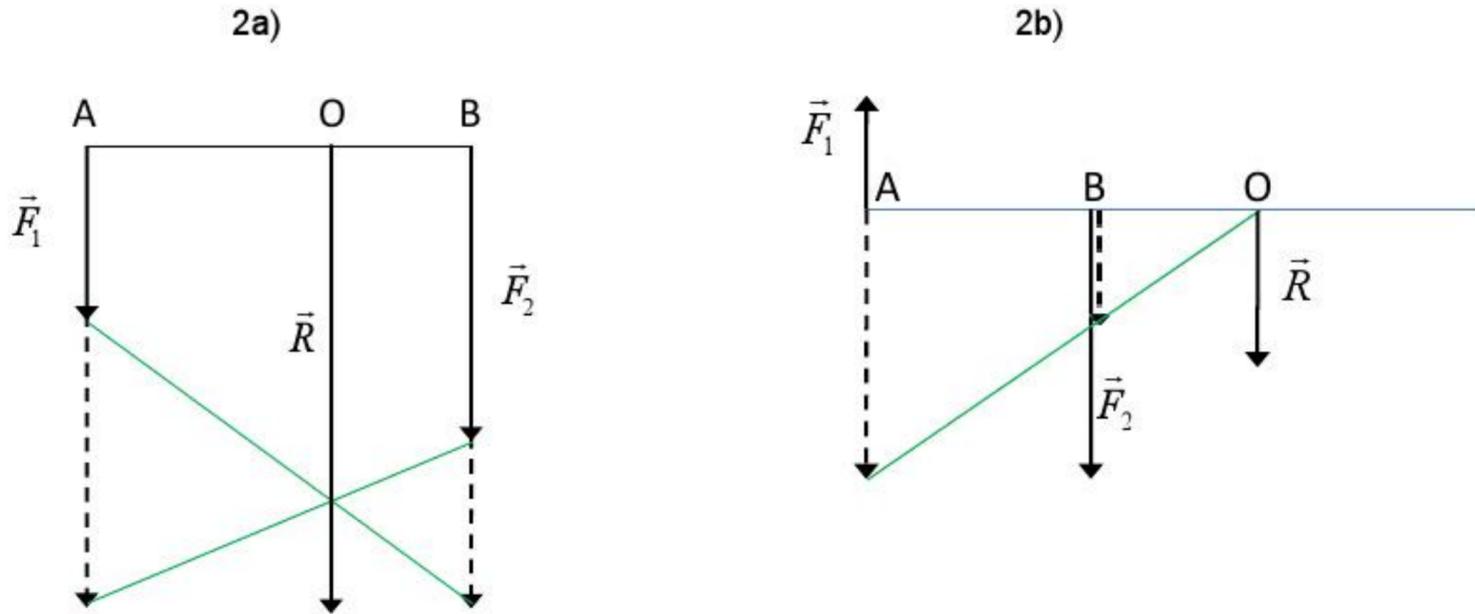
De acuerdo a la disposición de las fuerzas, podemos encontrar distintos tipos de sistemas. En el caso de fuerzas coplanarias pueden ser:

1) **Fuerzas Colineales:** 1a) de igual sentido; 1b) de sentido contrario



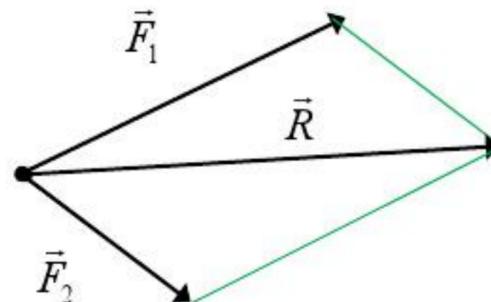
La resultante, \vec{R} , tiene módulo igual a la suma (1a) o resta (1b) de los módulos de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

2) **Fuerzas Paralelas:** 2a) de igual sentido, 2b) de sentido contrario



La resultante, \vec{R} , tiene módulo igual a la suma (2a) o resta (2b) de los módulos de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 . Además el punto de aplicación, O, se obtiene de la relación $\frac{\vec{F}_1}{BO} = \frac{\vec{F}_2}{AO} = \frac{\vec{R}}{AB}$ en ambos casos.

3) **Fuerzas Concurrentes:** Son aquellos cuyas rectas de acción pasan por un mismo punto.



La resultante, \vec{R} , se puede hallar por la regla del paralelogramo, como se muestra en el diagrama, o bien sumando las componentes de cada vector.

1.7 Leyes de movimiento de Newton

Antes de enunciar estas leyes introduciremos unos conceptos previos característicos del cuerpo o móvil al que se aplican y que son necesarios para su comprensión.

Momento lineal o cantidad de movimiento: es el producto de la masa del móvil por su velocidad, $\vec{p} = m\vec{v}$. Si lo expresamos en función de sus componentes cartesianas se tendrá:

$$\vec{p} = mv_x \vec{i} + mv_y \vec{j} + mv_z \vec{k}$$

Impulso mecánico: es el producto de la fuerza aplicada por el intervalo de tiempo que actúa, $\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$. En función de las componentes cartesianas será:

$$\vec{I} = F_x \Delta t \vec{i} + F_y \Delta t \vec{j} + F_z \Delta t \vec{k}$$

Primera ley de Newton: *Si sobre un cuerpo no actúa fuerza alguna o si la resultante es nula, el cuerpo mantiene el estado de reposo o de movimiento en que se encuentra.*

Segunda ley de Newton: *Existe una relación de proporcionalidad directa entre la fuerza que se aplica a un cuerpo y la aceleración que ésta produce.*

La constante de proporcionalidad es lo que conocemos como masa del cuerpo:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

La forma en que Newton escribió esta ley dice que las fuerzas aplicadas a un punto material (representación ideal del móvil) modifican su cantidad de movimiento, lo que matemáticamente se expresa como:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

que constituye la ecuación fundamental de la dinámica de los cuerpos. Esta ecuación la podemos poner en la forma:

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0,$$

que nos dice que el impulso mecánico es igual a la variación de la cantidad de movimiento.

También nos permite ver que la 1ª ley es sólo un caso particular de la 2ª. En efecto, si la fuerza resultante es nula, $\vec{F} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p} = cte \rightarrow \vec{v} = cte$.

Tercera ley de Newton: *Las fuerzas de interacción que ejercen dos cuerpos entre sí tienen la misma magnitud y dirección, aunque sentidos opuestos.*

La fuerza que inicia la interacción se denomina fuerza de *acción* y la que actúa sobre el cuerpo que la ejerce, fuerza de *reacción*. Por tanto la ecuación para esta ley será:

$$\vec{F}_{acción} = -\vec{F}_{reacción}$$

Por ejemplo, un objeto colocado encima de una mesa ejerce una acción que es igual su peso, y la mesa ejerce sobre el objeto una reacción igual pero de signo contrario.

Basándonos en estas leyes, es posible resolver una gran cantidad de problemas sobre movimiento de cuerpos cuando se conozcan las fuerzas que actúan en función el tiempo.

1.8 Equilibrio estático

Vamos a introducir previamente una serie de conceptos que nos permitan caracterizar el equilibrio de un cuerpo.

1.8.1 Concepto de cuerpo rígido. Centro de gravedad

Un *cuerpo rígido* es aquél que no sufre deformaciones por efectos de las fuerzas externas; ello supone que la distancia entre las partículas que lo componen no cambia con el tiempo. El cuerpo rígido es un modelo ideal, puesto que todos los cuerpos se deforman en alguna medida al someterlos a fuerzas o presiones. Sin embargo nosotros lo utilizaremos como una aproximación válida para el estudio de su dinámica.

En muchos problemas de dinámica hay que tener en cuenta la fuerza con que la Tierra atrae a cualquier masa y que, como ya hemos mencionado, se caracteriza por el valor de la aceleración de la gravedad. El *centro de gravedad* de un cuerpo es el punto teórico en el que tendría que estar concentrada toda su masa para poder considerarlo, de forma simplificada, como un objeto sin dimensiones (un punto). Es el punto en el que se aplicaría la fuerza de gravedad, como resultante de las fuerzas de gravedad que actúan sobre las distintas partículas que componen el cuerpo

1.8.2 Momento de una fuerza

Al aplicar fuerza sobre un cuerpo lo podemos trasladar o hacer que gire. Esto último es lo que ocurre cuando se abre o cierra una puerta o se hace rotar un volante. El efecto de giro se caracteriza por el *momento de la fuerza*. El momento \vec{M} respecto de un punto O de una fuerza \vec{F} aplicada en un punto A, es una magnitud vectorial dada por la expresión:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

donde \vec{r} es el vector posición del punto de aplicación A de la fuerza \vec{F} con respecto a O, como se muestra en la figura 1.9. El vector \vec{M} es perpendicular al plano que forman los vectores \vec{r} y \vec{F} .

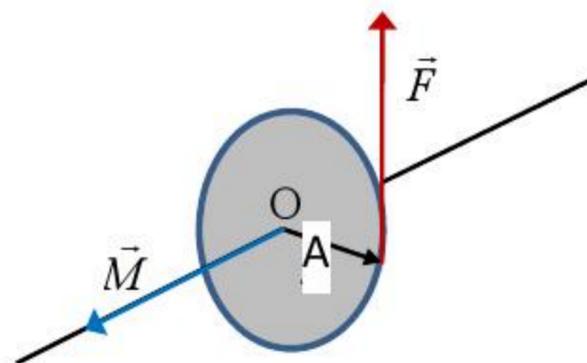


Figura 1.9: Momento de una fuerza.

En la figura se ve que \vec{M} está en el eje de giro y su sentido viene dado por la regla del tornillo.

1.8.3 Condiciones de equilibrio

Decimos que *un cuerpo está en equilibrio cuando la fuerza total o resultante que actúa sobre él y el momento resultante son nulos*. En este caso, la propiedad macroscópica del cuerpo que no cambia con el tiempo es la velocidad. En particular, si la velocidad inicial es nula el cuerpo permanecerá en reposo. El equilibrio mecánico puede ser de tres clases: *estable, indiferente o inestable*. Si las fuerzas son tales que un cuerpo vuelve a su posición original al ser desplazado, como ocurre con un tintero, el cuerpo está en equilibrio estable. Si las fuerzas que actúan sobre el cuerpo hacen que éste permanezca en su nueva posición al ser desplazado, como en una esfera situada sobre una superficie plana, el cuerpo se encuentra en equilibrio indiferente. Si las fuerzas hacen que el cuerpo continúe moviéndose hasta una posición distinta cuando se desplaza, como ocurre con una varita colocada sobre un pivote, el cuerpo está en equilibrio inestable.

1.9 Fuerzas de rozamiento

Cuando un cuerpo se desplaza libremente sobre el suelo observamos que al cabo de un tiempo se detiene; ello indica que el cuerpo experimenta una resistencia a su avance. Esta resistencia se denomina *rozamiento*.

Hay varios tipos de rozamiento según qué medios intervengan. Así, el rozamiento de rodadura entre el suelo y una rueda; rozamiento entre sólido y fluido; rozamiento de deslizamiento entre dos superficies cuando una desliza sobre la otra, etc.

Vamos a estudiar el rozamiento por deslizamiento porque, además de ser el más sencillo, lo podemos relacionar fácilmente con la dinámica de partículas ya vista.

Los aspectos más destacables en este tipo de rozamiento son:

- Es debido a la adherencia entre las superficies de contacto y al acople de rugosidades.
- La fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento.
- Aunque no haya movimiento puede existir rozamiento entre dos superficies.

Ejemplo:

Para analizar de qué depende y cuánto vale la fuerza de rozamiento, imaginemos el siguiente montaje: un objeto de masa m se encuentra en reposo apoyado sobre una mesa de forma que

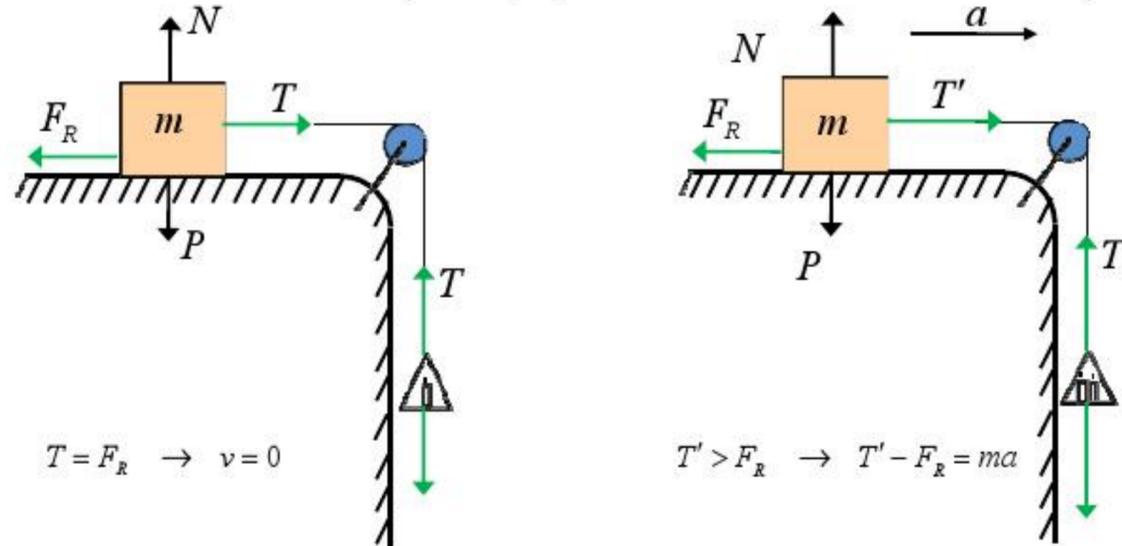


Figura 1.10: Rozamiento estático y cinético.

esté en contacto con ella una de sus caras, como se muestra en la Figura 1.10. Tiramos de él mediante una cuerda de masa despreciable, de cuyo extremo libre cuelga un platillo con pesas.

- Si colgamos un peso pequeño, el objeto no se mueve porque la tensión aplicada es equilibrada por la fuerza de rozamiento, $T = F_R$.
- Añadimos pesas de manera que el peso en el platillo aumenta lentamente, el objeto sigue sin moverse hasta que llega un momento en que la tensión de la cuerda es lo suficientemente grande como para vencer la de rozamiento y el objeto se mueve con una aceleración dada por $T' - F_R = ma$.

De este análisis sacamos las siguientes definiciones y conclusiones:

- ♣ Se llama rozamiento estático a la fuerza de rozamiento que existe entre dos superficies en reposo una respecto de la otra. Puede tomar cualquier valor desde cero a un valor máximo.
- ♣ La fuerza máxima de rozamiento estático es igual a la fuerza mínima necesaria para iniciar el movimiento.
- ♣ Se llama fuerza de rozamiento cinético a la fuerza necesaria para mantener el movimiento una vez iniciado.
- ♣ También se puede comprobar que si el objeto se apoya sobre otra cara más pequeña o más grande, se obtienen los mismos resultados para el rozamiento. Pero si colocamos otro objeto igual encima del primero la fuerza de rozamiento es justamente el doble.

Por tanto, ambas fuerzas estática y cinética son independientes de la extensión de las superficies de contacto y son proporcionales a la fuerza normal N que mantiene en contacto la mesa con el objeto (Figura 1.10).

Si la superficie de contacto es horizontal, la fuerza normal coincide con el peso del cuerpo.

En expresión matemática:

- **Fuerza de rozamiento estático:**

$F_R < \mu_e N$ si la fuerza de rozamiento no alcanza el valor máximo.

$F_R = \mu_e N$ si la fuerza de rozamiento alcanza el valor máximo

$\mu_e = \frac{F_R}{N} \rightarrow$ *coeficiente estático de rozamiento*

- **Fuerza de rozamiento cinético:**

$F_R = \mu_c N$

$\mu_c = \frac{F_R}{N} \rightarrow$ *coeficiente cinético de rozamiento*

Ambos coeficientes son adimensionales, dependen del tipo de material y siempre se cumple que, para un material dado, $\mu_e > \mu_c$.

Cuando la superficie donde se apoya el objeto es inclinada, hay que descomponer el peso en dos componentes: la paralela a la superficie que es la que se opone a la fuerza de rozamiento, y la normal a la superficie, que es la que proporciona el valor de la fuerza de rozamiento de acuerdo con las ecuaciones anteriores.

1.10 Máquinas simples: Palancas

Una máquina es un mecanismo con capacidad para realizar un trabajo. Vamos a aplicar esto al estudio de una máquina muy sencilla denominada palanca. Desde un punto de vista técnico, la palanca es una barra rígida que oscila sobre un punto de apoyo, *fulcro*, debido a la acción de dos fuerzas contrapuestas, *potencia y resistencia*. Cuando una palanca se emplea para vencer fuerzas, hay que considerar 4 elementos (Figura 1.11):

- 1) Potencia, \vec{P} , que es la fuerza aplicada.
- 2) Resistencia, \vec{R} , fuerza que hay que vencer.
- 3) Brazo de potencia, AO , distancia entre el punto donde se aplica la potencia y el fulcro.

4) Brazo de resistencia, BO , distancia entre el punto donde se aplica la resistencia y el fulcro.

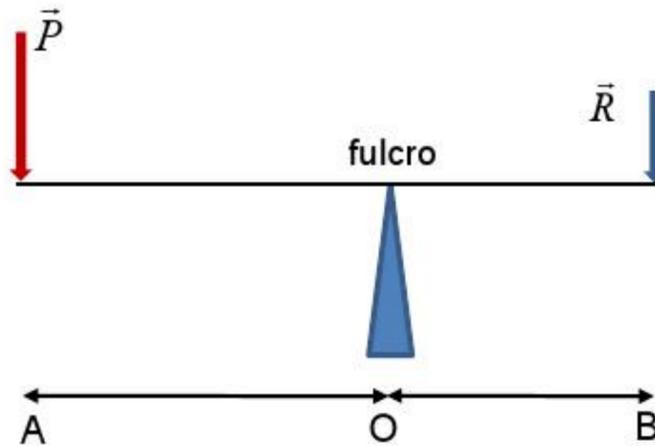


Figura 1.11: Elementos de una palanca.

Según la combinación de los puntos de aplicación de *potencia* y *resistencia* y la posición del *fulcro* se pueden obtener tres tipos de palancas:

Palanca de *primer grado*: Se obtiene cuando colocamos el fulcro entre la potencia y la resistencia. Ejemplos: el balancín, las tenazas, la balanza romana.

Palanca de *segundo grado*: Se obtiene cuando colocamos la resistencia entre la potencia y el fulcro. Ejemplos: la perforadora de hojas de papel, el cascanueces, la carretilla.

Palanca de *tercer grado*: Se obtiene cuando ejercemos la potencia entre el fulcro y la resistencia. Ejemplos: la caña de pescar, las pinzas de depilar, el aparato locomotor de los mamíferos.

Ley de la palanca: La potencia por su brazo es igual a la resistencia por el suyo:

$$\vec{P} \cdot AO = \vec{R} \cdot BO$$

Esta expresión matemática representa una proporción inversa entre la *potencia* y *su brazo* por un lado y la *resistencia* y *el suyo* por el otro. Por tanto, para una *resistencia* dada, aumentos de la *potencia* obligan a disminuir su *brazo*, mientras que aumentos del *brazo de potencia* supondrán disminuciones de su intensidad.

1.11 Trabajo y energía

Hemos visto que el problema fundamental que se plantea en la Dinámica es averiguar qué tipo de movimiento tiene un móvil si la fuerza que actúa: a) es una fuerza constante; b) es una función conocida del tiempo, $\vec{F}(t)$. A partir de dicha fuerza se calcula la aceleración, $\vec{a} = \vec{F} / m$, y posteriormente se deducen la velocidad y posición del móvil.

Hay situaciones en que solo se conoce cómo varía la fuerza en función de la posición, $\vec{F}(\vec{r})$, como por ejemplo la fuerza que ejerce un muelle comprimido, la fuerza electrostática, etc. El método que se utiliza para abordar este caso nos conduce a los conceptos de trabajo y energía, que han contribuido de manera importante al desarrollo de la Física.

1.11.1 Concepto de trabajo físico. Trabajo realizado por una fuerza variable. Potencia

Todos tenemos un concepto intuitivo del trabajo. Cuando alguien sube una caja a un cuarto piso dice que ha realizado un trabajo cuatro veces mayor que si la hubiera subido al primero. Si, en lugar de una caja, sube dos del mismo peso, diría que ha trabajado el doble. En estas afirmaciones están implícitos los *dos elementos* fundamentales del trabajo: la *fuerza* que se ejerce y el *desplazamiento* que se produce.

Para que una fuerza realice un trabajo se debe aplicar en la misma dirección en la que pretendemos que se produzca el desplazamiento. Por ejemplo, si queremos elevar un peso hay que tirar de él hacia arriba. Sin embargo, hay situaciones en que la dirección de la fuerza no coincide con la del desplazamiento; en este caso sólo *hay trabajo si la fuerza tiene una componente en la dirección el desplazamiento*.

Definimos matemáticamente este concepto utilizando las propiedades del producto escalar:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \alpha$$

donde α es el ángulo entre \vec{F} y $\Delta \vec{r}$. El *trabajo mecánico* elemental realizado por la fuerza se define como el *producto escalar de la fuerza por el desplazamiento elemental que ha experimentado el punto de aplicación de la misma*. En el SI el trabajo se mide en julios (J): 1 julio = 1 newton · 1 m.

Si la fuerza no es constante a lo largo del desplazamiento, se divide el camino en desplazamientos elementales, $d\vec{r}$, de forma que \vec{F} sea prácticamente constante durante ese recorrido; el trabajo elemental realizado será:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha$$

siendo α el ángulo que forma la fuerza y la tangente a la trayectoria en el punto donde se está calculando el trabajo, como se muestra en la Figura 1.12.

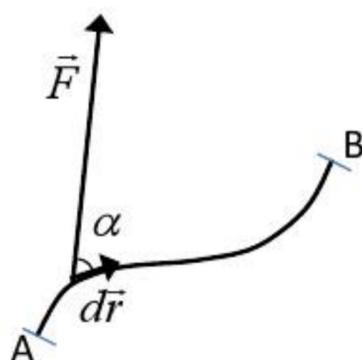


Figura 1.12: Trabajo elemental realizado por una fuerza variable.

Si los vectores vienen expresados por sus componentes cartesianas,

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \quad , \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

El trabajo elemental será:

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

y el trabajo total a lo largo del camino $A \rightarrow B$ se obtiene sumando todos los trabajos dW :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

También podemos expresar el trabajo en función de la componente de \vec{F} tangencial a al desplazamiento elemental:

$$W = \int_A^B |\vec{F}| \cos \alpha \, dl = \int_A^B F_t \, dl \quad , \quad dl = |d\vec{r}|$$

siendo F_t dicha componente tangencial.

Veamos ahora la definición de *potencia*: Es el trabajo suministrado por una fuerza en la unidad de tiempo. Consideremos una partícula con una velocidad instantánea \vec{v} ; en un intervalo dt la partícula se desplaza un $d\vec{r} = \vec{v} dt$. El trabajo realizado sobre la partícula es:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

De aquí deducimos que la potencia suministrada viene dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

En el SI la unidad de potencia es julio por segundo o vatio (W): $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Esta unidad resulta muy pequeña para determinadas aplicaciones, se suele usar un múltiplo llamado caballo de vapor (HP), de forma que $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$.

1.11.2 Energía: propiedades y clasificación

Al referirnos a la energía utilizamos diversos adjetivos. Hablamos de energía eólica, solar, elástica, cinética, hidráulica, eléctrica o química. En cualquier caso, todas tienen en común una propiedad que las define: *Energía es la capacidad de un sistema para realizar trabajo.*

En esta unidad estudiaremos dos formas de energía, la cinética y la potencial, dejando para más adelante la energía asociada a otros conceptos.

Energía cinética: Es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo en función de su estado de movimiento. Si nos preguntamos de dónde surge esa capacidad, debemos recordar que la fuerza que actúa sobre un cuerpo se asocia con la variación que experimenta la velocidad con que se mueve (2ª ley de Newton).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Supongamos que a una masa puntual m inicialmente en reposo en O , se le aplica una fuerza \vec{F} durante un tiempo t ; la partícula, al llegar al punto A tendrá una velocidad v_A , después de haber recorrido un cierto camino. La energía cinética de la partícula vendrá dada por el trabajo realizado por la fuerza. Para demostrarlo, consideremos el caso particular de una fuerza que actúa en la dirección x e integramos los trabajos elementales para desplazamientos dx :

$$W = \int_0^A F dx$$

De la 2ª ley de Newton podemos poner en este caso unidimensional la aceleración como:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

en donde se ha aplicado la regla de la cadena.

El trabajo total realizado será:

$$W = \int_0^A F dx = \int_0^A mv \frac{dv}{dx} dx = \int_0^{v_A} mv dv = \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^{v_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

que es igual a la energía cinética que ha adquirido la partícula. En general decimos que la energía cinética, E_c , de una partícula viene dada por:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2, \text{ en julios (J)}$$

Energía potencial: A diferencia de la energía cinética, que está asociada al movimiento, la energía potencial está asociada a la posición. Se denomina así debido a su aparente latencia, ya que no se manifiesta a menos que se generen las condiciones para ello. Por ejemplo, cuando dejamos caer una masa que por efecto de la gravedad, cuando soltamos un muelle, cuando dejamos libre una carga en un campo eléctrico, etc.

1.11.3 Teorema del trabajo-energía

Supongamos que tenemos una partícula en la posición A de la figura 1.13, que se mueve con velocidad v_A . La fuerza que actúa la desplaza hasta el punto B adonde llega con velocidad v_B .

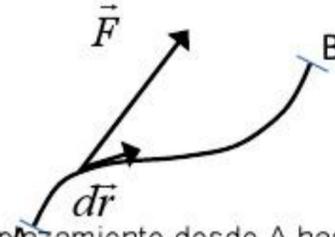


Figura 1.13: Desplazamiento desde A hasta B por efecto de una fuerza.

El trabajo realizado en este recorrido es:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{cB} - E_{cA} \quad (*)$$

Esta expresión nos permite enunciar el teorema de las fuerzas vivas o teorema del trabajo-energía: *El trabajo neto realizado por una fuerza es igual a la variación de la energía cinética de la partícula sobre la que actúa.*

También podemos deducir que toda partícula con velocidad puede realizar trabajo, pero solamente cuando pierde parte de su energía cinética. La energía cinética perdida es igual al trabajo realizado.

Este teorema permite resolver problemas de dinámica de una forma sencilla.

1.12 Fuerzas conservativas y no conservativas

Decimos que una fuerza es conservativa cuando al seguir una trayectoria cerrada el trabajo realizado sobre la partícula es nulo; por ejemplo, la fuerza elástica de un muelle. En caso contrario decimos que es no conservativa, es el caso de la fuerza de rozamiento. En la Figura 1.14 se muestra el diagrama para una trayectoria cerrada $A \rightarrow B \rightarrow A$.

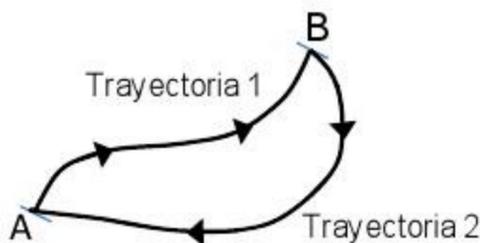


Figura 1.14: Trayectoria cerrada de una partícula.

Si la fuerza es conservativa podemos deducir lo siguiente:

$$W = \int_{\text{trayec1+trayec2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A \rightarrow B, \text{trayec1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B \rightarrow A, \text{trayec2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \int_{A \rightarrow B, \text{trayec1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{B \rightarrow A, \text{trayec2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como el desplazamiento desde B hasta A es de signo opuesto al desplazamiento desde A hasta B, queda finalmente:

$$\int_{A \rightarrow B, \text{trayec1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A \rightarrow B, \text{trayec2}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si la fuerza es conservativa, el trabajo realizado sobre una partícula para ir desde un punto hasta otro es independiente del camino seguido.

1.12.1 Función de energía potencial

Basándonos en la propiedad de las fuerzas conservativas podemos definir la *función energía potencial* E_p , asociada a las mismas. En general se define como una función tal que el trabajo realizado sea igual a la disminución de energía potencial, es decir,

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB} \quad (**)$$

Para un desplazamiento elemental se tendrá,

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como ejemplo, aplicamos esto al caso de una partícula moviéndose en un campo gravitatorio, $\vec{F} = -mg \vec{j}$:

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = mg \vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = +mgdy$$

Integrando entre dos alturas, h_1 y h_2 queda

$$E_{p2} - E_{p1} = \int_{h_1}^{h_2} mgdy = mg(h_2 - h_1)$$

Si uno de los puntos lo elegimos como referencia para esta energía y le asignamos el valor E_{p0} , la energía potencial gravitatoria vendrá dada por:

$$E_p = E_{p0} + mgh$$

El valor de h es positivo si está por encima del punto de referencia y negativo en caso contrario.

1.13 Conservación de la energía mecánica

Se llama energía mecánica a la *suma de la energía potencial y la energía cinética*.

Como resumen de lo analizado anteriormente y escrito en las ecuaciones (*) y (**), concluimos que cualquier aumento de energía cinética implica una disminución de la energía potencial, y viceversa:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p$$

La igualdad anterior también puede expresarse como $\Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta(E_c + E_p) = 0$,

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

Esto nos permite enunciar el principio de conservación de la energía mecánica: *Si sobre un cuerpo solamente actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica del cuerpo permanece constante.*

En el caso de que intervenga una fuerza no conservativa, el rozamiento por ejemplo, el trabajo realizado por dicha fuerza se resta de la energía mecánica.

UNIDAD 2. MECÁNICA DE FLUIDOS

2.1. Estados de agregación de la materia: Fluidos y sus características

Desde el punto de vista de la Mecánica es conveniente clasificar la materia en sólidos y fluidos. En la unidad anterior hemos estudiado el comportamiento de los sólidos caracterizados por tener forma definida y sus moléculas se encuentran fuertemente ligadas: son cuerpos rígidos. En un líquido en cambio, las fuerzas que unen sus moléculas son más débiles, forman enlaces transitorios que se rompen continuamente debido a la agitación. En un gas, la distancia entre moléculas es grande y sólo interaccionan cuando chocan. Gases y líquidos muestran aspectos comunes a la hora de estudiar su comportamiento mecánico y se denominan fluidos.

Las principales características de un fluido son:

- 1) La posición relativa de sus moléculas puede variar continuamente.
- 2) Son compresibles en mayor o menor grado. Los gases mucho más que los líquidos.
- 3) Tienen viscosidad. En los líquidos es mucho mayor que en los gases.

Podemos resumir estas propiedades diciendo que *un fluido es una sustancia que se deforma ante la aplicación de tensiones y se adapta a la forma del recipiente que lo contiene.*

2.2. Densidad de masa

Una característica importante de toda sustancia es la relación que hay entre su masa y su volumen. Este cociente se llama *densidad* y normalmente se representa por la letra ρ (rho),

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{V}$$

Se mide en kg/m^3 aunque también es frecuente medirla en g/cm^3 . La densidad varía enormemente dependiendo de la sustancia que consideremos, Tabla 2.1. En general es mucho menor en los gases y en este caso depende fuertemente de la presión y temperatura.

Aire	1,293	Aluminio	$2,70 \times 10^3$
Hidrógeno	0,0899	Cobre	$8,9 \times 10^3$
Oxígeno	1,429	Corcho	$0,24 \times 10^3$
Alcohol etílico	$0,81 \times 10^3$	Oro	$19,3 \times 10^3$
Mercurio	$13,6 \times 10^3$	Plata	$10,5 \times 10^3$
Agua	$1,0 \times 10^3$	Madera de pino	$0,42 \times 10^3$
Agua de mar	$1,03 \times 10^3$	Vidrio	$2,4 - 2,8 \times 10^3$

Tabla 2.1. Densidades en kg/m^3 a 0°C y 1 atmósfera de presión.

2.3 Hidrostática

La hidrostática es la parte de la mecánica que estudia los fluidos en condiciones de equilibrio, es decir, cuando no actúa una fuerza neta sobre ellos.

Vamos a introducir varios conceptos que nos permitirán realizar este estudio y que también aplicaremos en hidrodinámica.

2.3.1 Concepto de presión: presión en un fluido

Hay una diferencia fundamental entre cómo actúa una fuerza aplicada a un sólido o aplicada a un fluido. Una fuerza puede aplicarse en un punto de un sólido y éste presenta una reacción en ese punto. En cambio, sólo se puede aplicar una fuerza a un fluido contenido en un recipiente por intermedio de una superficie y solamente así puede el fluido resistirla. Además, en un fluido en reposo esta fuerza está siempre dirigida perpendicularmente a la superficie, porque en el caso que fuera tangencial se producirían desplazamientos de unas capas sobre otras. Por ello es conveniente describir la fuerza que actúa sobre un fluido especificando *la presión, P* , que se define como *la magnitud (módulo) de la fuerza normal por unidad de área de la superficie sobre la que se ejerce*.

$$P = \frac{F}{S}$$

Es una magnitud escalar y en el SI la unidad es el pascal (Pa), $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$. Otra unidad frecuentemente usada es la atmósfera (atm) que equivale a 101,325 kPa.

2.3.2. Presión hidrostática. Principio de los vasos comunicantes

Como sabemos por experiencia, la presión de un fluido aumenta con la profundidad. En el caso de un líquido como el agua, cuya densidad se mantiene aproximadamente constante, la presión aumenta linealmente con la profundidad. Podemos analizarlo ayudándonos de la Figura 2.1: La presión en la parte inferior de la columna es mayor que en la parte superior,

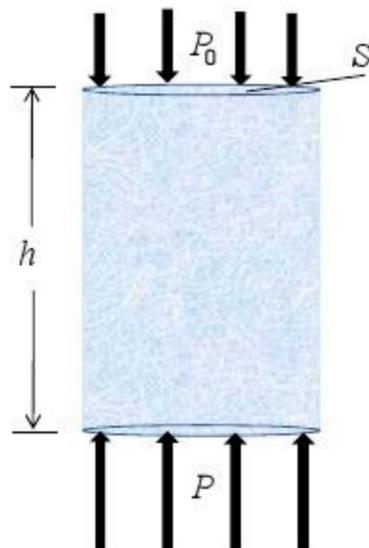


Figura 2.1. Columna de agua de sección S y altura h .

$P > P_0$, ya que debe soportar el peso de la columna de altura h . Este peso viene dado por:

$$w = mg = \rho Vg = \rho Shg$$

Si la presión en la base inferior es P y en la superior P_0 , la fuerza neta hacia arriba ejercida por esta diferencia de presiones será $PS - P_0S$; igualando esta fuerza al peso de la columna:

$$PS - P_0S = \rho Shg$$

Eliminado S en ambos miembros y despejando P queda finalmente:

$$P = P_0 + \rho gh$$

que es la ecuación que nos da la presión hidrostática cuando la densidad permanece constante. Con ella podemos comprobar que en el agua, la presión con respecto a la de la superficie en contacto con aire ($P_0 = 1 \text{ atm}$), se duplica a una profundidad de 10,3 m.

Si se ponen en comunicación varias vasijas de formas diferentes, se observa que el líquido alcanza el mismo nivel en todas ellas, Figura 2.2. A primera vista, debería ejercer mayor presión en su base aquel recipiente que contuviese mayor volumen de fluido pero, como se

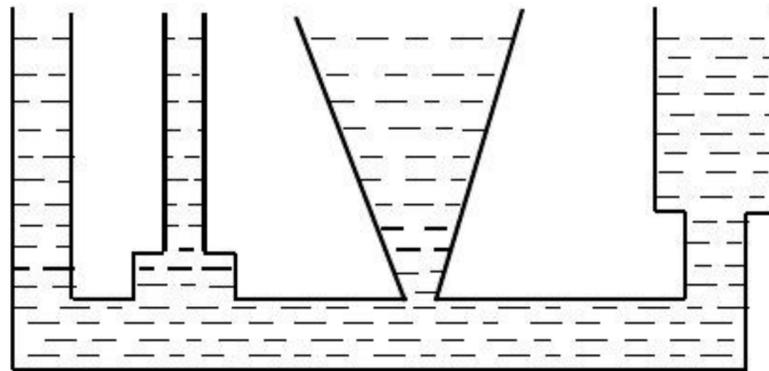


Figura 2.2. Principio de los vasos comunicantes.

ha demostrado en la ecuación fundamental de la estática de fluidos, *la presión solamente depende de la profundidad por debajo de la superficie del líquido y es independiente de la forma de la vasija que lo contiene*. Por ejemplo, en el recipiente con forma de V las paredes compensan la presión del líquido que queda fuera de la columna que contiene la boca.

Como es igual la altura del líquido en todos los vasos, la presión en la base es la misma y el sistema de vasos comunicantes está en equilibrio.

2.3.3. Presión atmosférica

La relación entre presión y altura es más compleja en el caso de un gas, debido a que la densidad de un gas no es constante sino que depende de la presión. Así, en la atmósfera terrestre si tomamos como referencia la superficie del planeta, la presión de una columna de aire disminuye al aumentar la altura; sin embargo no sigue la ley de proporcionalidad como ocurre en una columna de agua. En su lugar, se observa que la presión disminuye en una fracción constante para un incremento fijo de altura. A una altitud de 5,5 km la presión del aire es la mitad del valor que tendría a nivel del mar, y si ascendemos otros 5,5 km la presión se ha reducido a la mitad con respecto al nivel anterior y, por tanto, a una cuarta parte con respecto al nivel del mar. Matemáticamente, se tiene un *decrecimiento exponencial* descrito por la función:

$$P = P_0 e^{-ay}$$

donde $P_0 = P(y = 0)$ es la presión a nivel del mar. En unidades SI, $P_0 = 1,013 \times 10^5$ Pa; como la altitud se mide normalmente en km, la constante a tiene el valor $a = 0,116 \text{ km}^{-1}$.

2.4. Medida de la presión. Presión manométrica. Presión absoluta. Unidades

Para medir presiones desconocidas podemos utilizar el hecho de que la presión es proporcional a la profundidad. Los aparatos empleados se denominan manómetros y los hay de dos tipos: de gas y de líquido.

Muchos de los manómetros utilizan la [presión atmosférica](#) como nivel de referencia y miden la diferencia entre la presión real o absoluta y la presión atmosférica, llamándose a este valor [presión manométrica](#). La presión manométrica se expresa bien sea por encima o por debajo de la presión atmosférica.

El manómetro más sencillo consistente en un tubo de vidrio doblado en U que contiene un líquido apropiado (mercurio, agua, aceite). Una de las ramas del tubo está abierta a la atmósfera; la otra está conectada con el depósito que contiene el fluido cuya presión se desea medir (Figura 2.3).

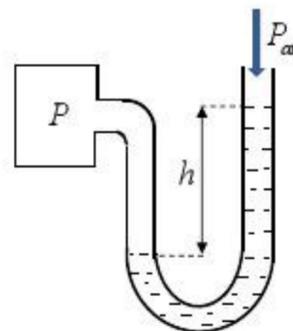


Figura 2.3. Manómetro de tubo abierto para medir una presión desconocida P .

Según este esquema se tiene:

$$P - P_{at} = \rho gh = P_{manométrica} \rightarrow P = P_{manométrica} + P_{at}$$

Por tanto, la *presión absoluta*, P , es igual a la presión que marca el aparato más la presión atmosférica. Precisamente para medir la presión atmosférica, Torricelli diseñó en 1643 el barómetro de mercurio, Figura 2.4. Es un tubo largo de vidrio que se llena de mercurio y se invierte introduciéndolo en una cubeta que también contiene mercurio. De esta forma, la presión en

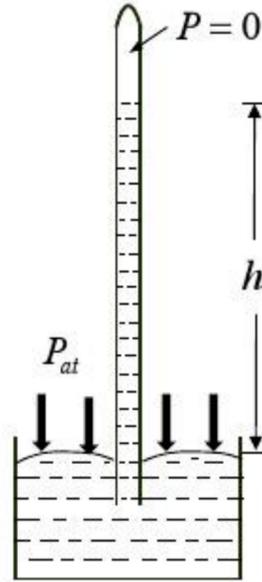


Figura 2.4 Barómetro de Torricelli.

la parte superior del tubo es prácticamente nula. El extremo inferior se encuentra abierto y a la presión atmosférica. El mercurio del tubo descenderá hasta que se igualen la presión atmosférica y la hidrostática:

$$\rho_{Hg} gh = P_{at}$$

Por ejemplo, si medimos a $0^{\circ} C$ la densidad del mercurio es $\rho_{Hg} = 13,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, y si la presión atmosférica es $P_{at} = 1 \text{ atm}$, observaremos que la columna de mercurio alcanza una altura $h = 760 \text{ mm}$.

La presión se mide frecuentemente en mm de mercurio o *torr* en honor de este físico.

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr} = 101,325 \text{ kPa}$$

Otras unidades que se utilizan en los mapas meteorológicos son el bar y el milibar. Su relación con el pascal es la siguiente

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ milibares} = 100 \text{ kPa}$$

2.5. Principio de Pascal: Prensa hidráulica

Cuando un fluido está en reposo, la diferencia de presión entre dos puntos sólo depende de la diferencia de nivel entre ellos y de la densidad. Por ello, si se aumenta la presión en cualquier punto, tendrá lugar el mismo cambio en todos los puntos siempre que la densidad permanezca constante. Este resultado fue enunciado por Pascal y se conoce con su nombre.

Principio de Pascal: *Un cambio de presión aplicado a un fluido confinado se transmite con el mismo valor a todos los puntos del fluido y a las paredes del depósito que lo contiene.*

Si el fluido es incompresible, un cambio de presión se transmite instantáneamente a todas las partes. Si es compresible, el cambio se propaga como una onda a la velocidad del sonido en ese fluido. Una vez que cesa la perturbación, se encuentra que el principio de Pascal es también válido para fluidos compresibles.

Una de las aplicaciones más importante de este principio es la prensa hidráulica, Figura 2.5, que permite elevar grandes pesos de una forma sencilla y eficiente.

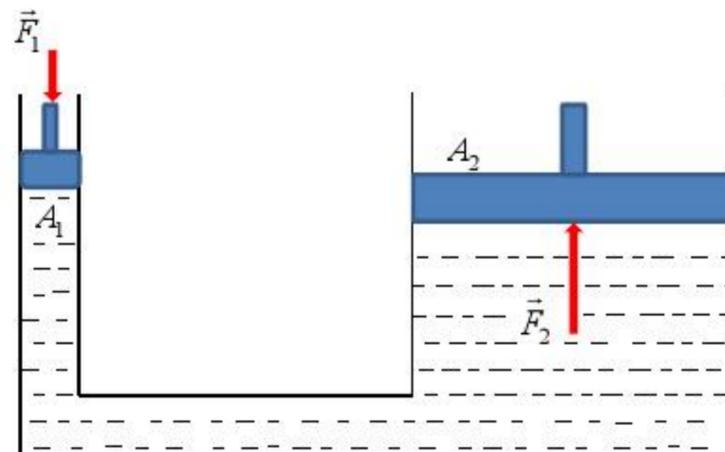


Figura 2.5. Prensa hidráulica.

Una fuerza \vec{F}_1 ejercida sobre el pistón de área A_1 , produce una variación de presión que se transmite al pistón de área $A_2 > A_1$. Se cumplirá entonces que

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Se tendrá $\vec{F}_2 > \vec{F}_1$ de acuerdo con la relación entre áreas, $\frac{A_2}{A_1}$.

2.6. Principio de Arquímedes

El principio de Arquímedes es también consecuencia de las leyes de la estática de fluidos.

Cuando un cuerpo está total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, experimenta una presión en cada punto de su superficie en contacto con el fluido. La presión es mayor en las zonas sumergidas más profundamente como se ilustra en la figura 2.6.

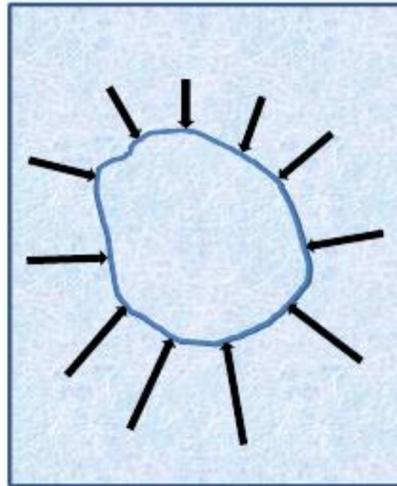


Figura 2.6. Principio de Arquímedes.

La resultante de todas las fuerzas es una fuerza vertical *hacia arriba* llamada *empuje ascendente*. Podemos determinar la magnitud y dirección de esta fuerza resultante de una manera sencilla. La presión que obra sobre cada parte del cuerpo no depende de su naturaleza; supongamos que el cuerpo, o la parte del mismo que está sumergida, se reemplaza por un fluido como el que lo rodea. Este fluido experimentará las mismas presiones que actuaban sobre el cuerpo, Figura 2.6, y estará en reposo. En consecuencia, la fuerza ascendente resultante sobre él será igual a su peso y estará aplicada verticalmente hacia arriba, pasando por su centro de gravedad. De aquí se deduce el principio de Arquímedes.

Principio de Arquímedes: *Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido, experimenta un empuje ascendente igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo.*

Hemos visto que la fuerza actúa verticalmente hacia arriba, pasando por el centro de gravedad del fluido antes de ser desalojado. El punto correspondiente del cuerpo sumergido se denomina *centro de flotación*. Es importante que en el diseño de embarcaciones éste quede por encima del centro de gravedad para asegurar su estabilidad y que no sea fácil volcarlas.

2.7. Hidrodinámica

La hidrodinámica estudia el movimiento de los fluidos incompresibles. Etimológicamente, la hidrodinámica es la dinámica del agua, puesto que el prefijo griego "hidro-" significa "agua". Aun así, también incluye el estudio de la dinámica de otros fluidos. En las primeras secciones introduciremos las

variables que necesitamos para después pasar a formular las distintas ecuaciones que rigen el comportamiento de los fluidos en movimiento.

2.7.1. Conceptos fundamentales: Flujo, clasificación y características

Una manera de describir el movimiento de un fluido sería tratar de seguir el movimiento de cada partícula en el seno del mismo. A la partícula i -ésima le asignaríamos las coordenadas (x_i, y_i, z_i) especificándolas como funciones del tiempo t . Este procedimiento es inabordable a no ser que se utilicen ordenadores muy potentes y modelos complejos.

Hay otra manera más simple de abordar el estudio, y que es una buena aproximación en la mayoría de los casos. Consiste en especificar la densidad y la velocidad del fluido en cada punto del espacio en cada instante. Describimos el movimiento del fluido dando el valor de la densidad $\rho(x, y, z, t)$ y la velocidad $\vec{v}(x, y, z, t)$ en el punto (x, y, z) en el instante t . Es decir, enfocamos la atención sobre lo que está ocurriendo en un punto particular del espacio en un tiempo particular, y no en lo que le sucede a una partícula dada. No obstante, necesitaremos seguir a las partículas durante cortos intervalos de tiempo dt .

Vamos a definir las principales características de los fluidos para poder utilizarlas en la elaboración de nuestros modelos y comprender hasta dónde alcanza su validez.

Régimen estable y régimen variable: En un régimen estable o estacionario la velocidad de la partícula que pasa por un punto dado es siempre la misma; la velocidad puede ser distinta en otro punto del fluido pero siempre conservando ese carácter de valor fijo para cada posición. En el flujo de régimen variable las velocidades, \vec{v} , son función del tiempo. Esta situación es propia de flujos turbulentos, mientras que cuando la velocidad del flujo es moderada se alcanza normalmente el régimen estacionario.

Flujo rotacional o irrotacional: Para determinar si el flujo tiene un carácter u otro, colocamos una rueda con aspas (molinillo) en el fluido. Si la rueda se mueve y, a la vez, gira, decimos que el flujo es rotacional. Cuando se mueve con el fluido pero no gira, decimos que el flujo es irrotacional. Así, en un río las aguas de la parte central discurren con velocidad máxima y ésta va disminuyendo hacia ambas orillas hasta alcanzar un valor nulo en ellas. Si colocamos el molinillo, parte de las aspas reciben un impulso mayor por encontrarse más cerca del centro que las del lado opuesto que reciben el impulso de las partículas más lentas. Esto da lugar a un par neto que le hace girar. El sentido de giro es horario o anti-horario, según pongamos el molinillo entre el centro y la orilla derecha o el centro y orilla la

izquierda. Los tornados o la salida de agua por un desagüe, son también ejemplos de flujo rotacional. Su estudio es bastante complejo y, por ello, en los casos que nosotros vamos a analizar el flujo será irrotacional.

Flujo compresible o incompresible: Los líquidos fluyen generalmente sin experimentar cambios de densidad. Pero aún los gases que son altamente compresibles, a veces tienen ligeras variaciones y asumimos que su flujo es casi incompresible. En navegación aérea y a velocidades bastante menores que la del sonido, el movimiento del aire respecto de las alas es de flujo casi incompresible. En estos casos, la densidad del fluido es independiente de la posición lo cual simplifica mucho el modelo matemático.

Flujo viscoso o no viscoso: La viscosidad en el movimiento de los fluidos es un fenómeno análogo al de fricción en sólidos. Introduce fuerzas tangenciales entre las capas de fluido de manera que una capa arrastra a la contigua, ésta a la siguiente, etc. Es muy importante en problemas de lubricación, pero nosotros supondremos que tiene una influencia despreciable.

Resumiendo, limitaremos nuestro estudio de la dinámica de fluidos al flujo de régimen *estable, irrotacional, no viscoso*. A pesar de estas simplificaciones, los resultados son aplicables a un gran número de situaciones prácticas.

2.7.2. Flujo de masa y flujo de volumen. Ecuación de continuidad

En primer lugar introducimos la definición de *línea de corriente*: es la curva tangente a la velocidad de la partícula a lo largo de su recorrido. En un flujo estacionario las líneas de corriente no pueden cruzarse. Podemos imaginar que dibujamos una línea de corriente para distintos puntos del fluido formando un haz como el que se muestra en la Figura 2.7.

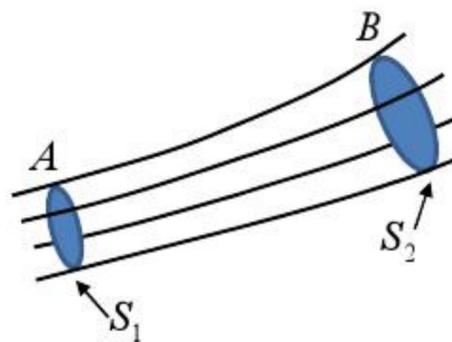


Figura 2.7. Tubo de flujo formado por un haz de líneas de corriente.

El tubo se comporta como una tubería, ninguna línea de corriente puede cruzar la frontera; por consiguiente, el fluido que entra por un extremo debe salir por el otro. Sea v_1 la velocidad de las partículas en A y v_2 la velocidad en B. Sean S_1 y S_2 las secciones transversales del tubo en A y B,

respectivamente. En el intervalo de tiempo Δt un elemento de fluido avanza una distancia $v\Delta t$. Por tanto, la masa de fluido Δm_1 que cruza S_1 en dicho intervalo es aproximadamente:

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$$

El ritmo con el que atraviesa la masa esta superficie se conoce con el nombre de *flujo de masa*:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 S_1 v_1$$

Hay que tomar Δt lo suficientemente pequeño para que ni v ni S cambien apreciablemente. En el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos:

$$\frac{dm_1}{dt} = \rho_1 S_1 v_1$$

En B se tendrá para el flujo de masa:

$$\frac{dm_2}{dt} = \rho_2 S_2 v_2$$

Puesto que el fluido permanece confinado en el tubo de corriente, y que no hay ‘fuentes’ ni ‘sumideros’ en los que aparezca o desaparezca fluido, el ritmo al que fluye la masa por cada sección del tubo en la unidad de tiempo ha de ser el mismo:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Es decir, en cualquier sección transversal del fluido se ha de cumplir que:

$$\rho S v = \text{constante}$$

Esta es la *ecuación de continuidad* del flujo de masa y expresa matemáticamente la conservación de la masa. Si el fluido es incompresible se cumple además $\rho_1 = \rho_2$ y la ecuación de continuidad se reduce a

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \rightarrow S v = \text{constante}$$

El producto Sv se denomina *flujo de volumen*, y también *gasto* o *caudal*. La ecuación nos dice que si a lo largo de un tubo de flujo la sección disminuye, se ha de producir un aumento de la velocidad que compense dicha variación.

Por ejemplo, la sangre circula por una arteria aorta de radio $r = 1$ cm a una velocidad $v = 30$ cm/s; ello implica un caudal de $\pi r^2 v = 9,4 \times 10^{-5}$ m³/s. Normalmente esta cantidad se da en litros por minuto; como $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$, y $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, se tiene para este caso un caudal de 5,65 L/min. Si en otra región este vaso sanguíneo se estrecha hasta un radio de 0.8 cm, la velocidad habrá aumentado a 8,83 L/min.

2.8. Ecuación de Bernoulli

Es otra de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Es en resultado de la aplicación del teorema del trabajo y la energía para el caso de flujo de fluidos. Fue dada a conocer en 1738 por Daniel Bernoulli y expresa que *en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido.*

La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- 1) Cinética: es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- 2) Potencial gravitacional: es la energía debida a la altitud que un fluido posea.
- 3) Energía de flujo: es la energía que un fluido contiene debido a la presión que soporta.

Consideremos la situación que se muestra en la Figura 2.8. La porción de tubo a la izquierda

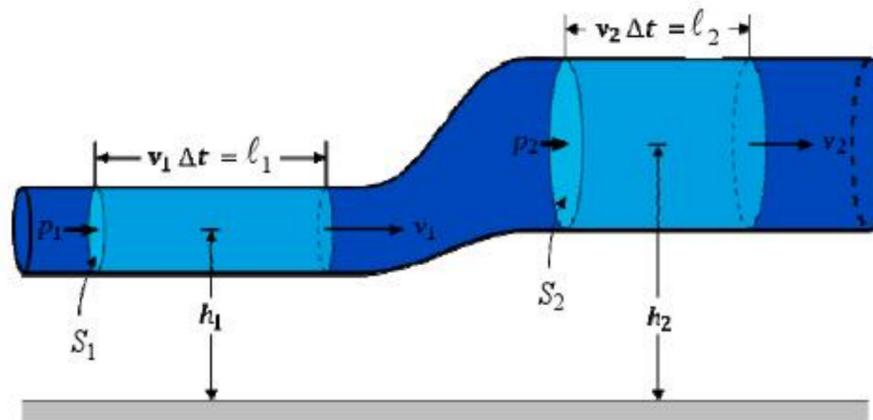


Figura 2.8. Una porción de fluido (color claro) se mueve desde la posición inferior a la superior.

tiene una sección S_1 y está a una altura h_1 sobre el nivel de referencia; el flujo es horizontal. El tubo se ensancha gradualmente y se eleva hasta una altura h_2 donde el fluido fluye horizontalmente a través de una sección S_2 . En todos los puntos de la parte estrecha la velocidad es v_1 y en la ancha v_2 . Por otra parte, en un intervalo Δt la porción de la izquierda avanza un tramo ℓ_1 paralela a la fuerza externa $P_1 S_1$, proporcionada por el fluido que queda detrás de ella, de forma que el trabajo hecho sobre el sistema es $P_1 S_1 \ell_1$. En la parte superior y en ese mismo Δt la porción avanza una distancia ℓ_2 contra la fuerza $P_2 S_2$ del fluido que queda más a la derecha, de forma que el trabajo hecho por el propio sistema es $P_2 S_2 \ell_2$. Por tanto, para moverlo debe hacerse una cantidad neta de trabajo sobre el sistema dada por:

$$P_1 S_1 \ell_1 - P_2 S_2 \ell_2$$

Pero $S_1 \ell_1$ y $S_2 \ell_2$ son los volúmenes de las regiones destacadas en la Figura 2.8. Ambos son iguales porque el fluido es incompresible: $S_1 \ell_1 = S_2 \ell_2 = m / \rho$, siendo m y ρ la masa y densidad del fluido, respectivamente. Se tiene entonces:

$$(P_1 - P_2) \frac{m}{\rho} = \text{trabajo neto hecho sobre el sistema.}$$

Si el flujo no es viscoso, el trabajo neto hecho sobre el sistema por la fuerza de presión debe ser igual a la ganancia de energía mecánica. Para hacer el balance tenemos en cuenta que:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = \text{cambio neto de energía cinética}$$

y

$$m g h_2 - m g h_1 = \text{cambio neto de energía potencial gravitatoria}$$

Por tanto,

$$(P_1 - P_2) \frac{m}{\rho} = \frac{1}{2} (m v_2^2 - m v_1^2) + (m g h_2 - m g h_1)$$

Reordenando los términos, de forma que todos tengan dimensiones de presión, queda:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Como los subíndices 1 y 2 se refieren a dos posiciones arbitrarias, podemos suprimirlos y queda la expresión matemática del teorema de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{constante}$$

Esta ecuación es estrictamente aplicable sólo a fluidos no viscosos en régimen estable. Nos dice que la suma de los tres términos de presión, las debidas a la fuerza aplicada, a la velocidad del fluido y a la altura, permanece constante a lo largo del tubo. En particular si el tubo es horizontal ($h_2 - h_1 = 0$), permanecerá constante la suma $P + \frac{1}{2} \rho v^2$; si por ejemplo P disminuye, la velocidad v debe aumentar en la proporción adecuada (efecto Venturi).

Existen numerosas aplicaciones de esta ecuación tales como el venturímetro, que es un aparato para medir la velocidad de un fluido, el carburador de un motor de gasolina, el pulverizador, etc.

UNIDAD 3. TERMODINÁMICA

3.1. Calor y Temperatura.

El conocimiento empírico de lo que llamamos “calor” y “frío” ha ido ampliándose desde los albores de la civilización. Sin embargo, se tardó bastante en establecer las magnitudes apropiadas para cuantificar los fenómenos relacionados con el calor, debido sobre todo al carácter abstracto de la magnitud fundamental que se requiere para ello: la temperatura.

Hasta principios del siglo XIX se creía que los cuerpos poseían una sustancia especial llamada *calórico* responsable de los procesos térmicos. Un cuerpo a elevada temperatura poseía mucho calórico mientras que si estaba a baja temperatura contenía poco. Según esta hipótesis, la relación entre calor y temperatura sería semejante a la relación que hay entre la cantidad de agua que contiene un recipiente y el nivel que alcanza: La temperatura sería el nivel de calor que posee el cuerpo.

La transmisión de calor se explicaba también con un símil de fluidos: Si dos cuerpos se ponen en contacto, el que tiene más nivel calórico cede al que tiene menos hasta que ambos igualan sus temperaturas, como en los vasos comunicantes.

El primero que postuló que el calor *no era una sustancia* que poseían los cuerpos sino *una forma de energía* fue Benjamin Thompson en 1798. Tuvo esa idea cuando inspeccionaba la construcción de un cañón. Para evitar un calentamiento excesivo, el taladro perforador se sumergía en agua, la cual se calentaba hasta llegar a hervir. Este fenómeno se explicaba asumiendo que cuando una sustancia se divide más finamente, pierde su capacidad de almacenar el calórico; el flujo de calórico al agua hace que ésta hierva.

Sin embargo, Thompson hizo notar que el agua seguía hirviendo incluso cuando el taladro se embotaba, de modo que ya no cortaba la materia, bastaba con que siguiera trabajando. Por tanto, concluyó que el calor que absorbía el agua era debido exclusivamente al movimiento del taladro y era consecuencia del trabajo mecánico empleado en el proceso de perforación.

Más tarde se desarrolló esta idea considerando el fenómeno como una transformación de un tipo de energía (mecánica) en otro (térmica) de forma que la energía total se conserva. Así, el *calor es una energía que puede medirse solamente por los efectos que produce*.

Por otra parte, todos tenemos un *concepto intuitivo de la temperatura mediante el sentido del tacto*. Por medio de él podemos distinguir los cuerpos calientes de los fríos y establecer comparaciones. Decimos que el tacto es un sentido termométrico. Sin embargo, es demasiado subjetivo y no nos permite expresar numéricamente las sensaciones térmicas.

Necesitamos, por tanto, establecer una medida objetiva y cuantitativa de la temperatura, como veremos más adelante.

3.2. Sistemas y variables termodinámicos

3.2.1 Sistemas termodinámicos

En Física se denomina *sistema termodinámico a cualquier región del universo que esté separada del resto por una superficie cerrada*, ya sea ésta real o imaginaria.

Los sistemas termodinámicos se relacionan con el medio que los rodea intercambiando materia y/o energía. En la Tabla 3.1 se listan las distintas clases de sistemas. Las paredes impermeables impiden que el sistema intercambie materia con el exterior; las paredes adiabáticas impiden el intercambio de calor, y las diatérmicas sí lo permiten. Además, las paredes fijas impiden el intercambio de energía en forma de trabajo.

	SISTEMAS TERMODINÁMICOS			
Intercambio con el exterior	Aislado	Adiabático	Cerrado	Abierto
Materia	No	No	No	Sí
Energía en forma de calor	No	No	Sí	Sí
Energía en forma de trabajo	No	Sí	Sí	Sí
Tipo de paredes que encierran el sistema termodinámico	Impermeables Adiabáticas Fijas	Impermeables Adiabáticas Móviles	Impermeables Diatérmicas Móviles	Permeables Diatérmicas Móviles

Tabla 3.1. Clasificación de los sistemas termodinámicos.

3.2.2. Variables termodinámicas. Equilibrio termodinámico. Principio cero de la termodinámica

Las magnitudes que sirven para conocer el estado de un sistema termodinámico se denominan variables termodinámicas; por ejemplo, la presión, el volumen, la temperatura, el número de moles.

Variables como la presión, temperatura y densidad, cuyo valor no depende de la cantidad de sistema considerado se llaman *variables intensivas*. Por el contrario, variables como el volumen que sí dependen de la cantidad de sistema considerado, se llaman *variables extensivas*.

Se denomina *estado de equilibrio termodinámico* al estado en que las variables termodinámicas no varían con el tiempo y las variables intensivas tiene el mismo valor en cualquier región del sistema.

Teniendo en cuenta todas estas definiciones podemos enunciar lo que se conoce como Principio cero de la Termodinámica, que se formula de dos maneras:

- (a) Dos sistemas aislados A y B, que son puestos en contacto térmico acaban estando en equilibrio térmico.
- (b) Si A está en equilibrio térmico con B y B está en equilibrio térmico con C, A y C están en equilibrio térmico.

3.3. Medición de la temperatura: Termómetros y escalas termométricas

Para caracterizar apropiadamente los fenómenos termodinámicos se necesita una medida objetiva y numérica de la temperatura, T . Para ello podemos aprovechar el hecho de que hay muchas propiedades físicas que dependen de la temperatura: La longitud de un alambre, el volumen de un líquido, la resistencia eléctrica de un conductor, etc. Se puede establecer una correspondencia biunívoca entre cada estado térmico y el valor numérico que toma una de estas propiedades.

Por tanto, si queremos construir un termómetro debemos primero elegir una propiedad termométrica, X , que obedezca una ley de del tipo:

$$T = kX$$

donde k es la constante de proporcionalidad entre T y X .

El segundo requisito es establecer una escala de temperaturas eligiendo dos puntos fijos como, por ejemplo, las temperaturas de fusión y ebullición del agua a la presión de 1 atmósfera y dividiendo el intervalo entre ambos en divisiones iguales. Estos son precisamente los puntos elegidos para la escala Celsius: se divide la escala en 100 divisiones, cada una de 1 grado centígrado, y se asigna el valor 0°C a la temperatura de fusión y 100°C a la ebullición. En la escala Fahrenheit, al punto de fusión del hielo le corresponden 32°F , mientras que el de ebullición se fija en 212°F . Hoy día, muchos de los termómetros que se construyen suministran el valor de la temperatura en ambas escalas.

Históricamente, la unidad de medida del calor se estableció una vez aceptada por la comunidad científica la escala Celsius: *La unidad de calor es la caloría (cal) que se define como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un gramo de agua de $14,5^{\circ}\text{C}$ a $15,5^{\circ}\text{C}$.*

Escala Kelvin: cero absoluto de temperatura

Las escalas anteriores son de gran utilidad al medir temperaturas en la vida cotidiana. Pero para propósitos científicos es mejor utilizar lo que se llama una escala absoluta o escala Kelvin. Se asigna un valor de cero grados a la temperatura a la que las moléculas que conforman el cuerpo no tienen energía

cinética (reposo absoluto), lo que corresponde a una temperatura de $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$. En esta escala la temperatura de fusión del agua es $273,15\text{ K}$ y la de ebullición $373,15\text{ K}$. Observemos que el intervalo es el mismo: $1\text{ }^{\circ}\text{K} = 1\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Una vez establecidas las escalas podemos definir el concepto cuantitativo de temperatura. *La temperatura es una variable que mide, mediante una escala adecuada, los diferentes estados térmicos de un cuerpo y que depende de la energía cinética de sus moléculas.*

3.4. Expansión térmica: Sólidos y líquidos

Cuando un cuerpo absorbe calor pueden ocurrir diversos cambios en sus propiedades físicas. Así, su temperatura puede aumentar al tiempo que aumentan sus dimensiones. También puede ocurrir un cambio de fase de sólido a líquido o de líquido a vapor, y en este caso la temperatura permanece constante.

Vamos a caracterizar en primer lugar la dilatación en una dimensión. Supongamos una varilla de longitud L a una temperatura T . Se observa que cuando la temperatura varía en ΔT , el cambio de longitud ΔL es proporcional a dicho incremento y a L :

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

En donde el coeficiente de proporcionalidad, α , se denomina *coeficiente de dilatación lineal* y es igual al cociente entre la variación relativa de longitud y la variación de temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta L / L}{\Delta T}$$

Se mide en unidades de $1/^{\circ}\text{C}$ o bien de $1/^{\circ}\text{K}$. Este coeficiente no varía apenas con la presión, pero puede depender significativamente de la temperatura. La ecuación anterior nos da un promedio de α en el intervalo ΔT . Una definición más precisa sería:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta L / L}{\Delta T} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \right|$$

Análogamente, se define el coeficiente de dilatación de volumen, β , como el cociente entre la variación relativa de volumen de un cuerpo y la variación de su temperatura:

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta V / V}{\Delta T} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \right|$$

Para todo material se cumple $\beta = 3\alpha$.

Dilatación anómala del agua: se ha comprobado que el comportamiento del agua entre 0 °C y 4 °C no es el normal; cuando se calienta el agua en ese rango, en lugar de dilatarse se contrae de forma que la densidad es máxima a 4 °C. Ello tiene importantes consecuencias para la vida, ya que el hielo flota y permite que los seres que viven en el agua no perezcan cuando el agua de la superficie se congela.

3.5. Calorimetría y cambios de fase

La calorimetría se desarrolló históricamente como una técnica destinada a fabricar aparatos y procedimientos que permitieran medir la cantidad de calor desprendida o absorbida en una reacción mecánica, eléctrica, química o de otra índole. Esta disciplina, encuadrada dentro de la termodinámica, se ha especializado sobre todo, con el paso del tiempo, en la determinación del calor específico de los cuerpos y los sistemas físicos.

3.5.1. Capacidad calorífica y calor específico

Sabemos por experiencia que los distintos cuerpos experimentan variaciones distintas al recibir la misma cantidad de calor. Por ejemplo, cuando dejamos el coche al Sol, las partes metálicas se calientan más que el vidrio de las ventanillas. Para cuantificar este fenómeno definimos la capacidad calorífica.

Capacidad calorífica de un cuerpo es la cantidad de calor que necesita para aumentar en 1 °C su temperatura. Matemáticamente lo expresamos como el cociente entre la cantidad de calor suministrado a un cuerpo, ΔQ , y el incremento de su temperatura, ΔT :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

La unidad de capacidad calorífica es cal/°C; en el SI se mide en J/K.

En la definición de capacidad calorífica no se ha tenido en cuenta la masa del cuerpo. Si queremos generalizar la capacidad calorífica para todos los cuerpos independientemente de su masa, habrá que calcularla para la unidad de masa. Por ello se define una nueva magnitud: la capacidad calorífica por unidad de masa o calor específico:

Calor específico es la cantidad de calor que hay que suministrar a 1g de una sustancia para elevar 1 °C su temperatura. Teniendo en cuenta la ecuación anterior queda:

$$c_e = \frac{C}{m} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$$

En el SI el calor específico se mide en J/kg·K. En la práctica se utiliza frecuentemente como unidad cal/gr·°C. Notemos que la caloría, tal como se ha definido, representa el calor específico del agua. En rigor, ni la capacidad calorífica ni el calor específico son constantes sino que dependen del intervalo de

temperatura en el que se haga la medida. Por ello, en la definición de caloría se especifica que el intervalo es entre 14,5 °C y 15,5 °C.

El calor específico de una sustancia no tiene un valor único sino que depende de las condiciones en que se suministre calor. Por ejemplo si se calienta un gas a volumen constante se necesita menos calor para elevar 1 grado su temperatura que si se calienta a presión constante.

Todos los métodos calorimétricos se basan en dos principios:

1. *Principio de igualdad de los intercambios de calor:* Cuando dos cuerpos se ponen en contacto, de forma que estén aislados del exterior, la cantidad de calor que pierde uno es igual a la cantidad de calor que gana el otro,

$$\Delta Q_{\text{perdido}} = \Delta Q_{\text{ganado}}$$

2. *Principio de las transformaciones inversas:* La cantidad de calor que hay que suministrar a un cuerpo para su temperatura se incremente en ΔT es igual a la cantidad de calor que debería perder para disminuir ese mismo ΔT . Es decir, la ecuación $\Delta Q = mc_p \Delta T$ es válida tanto para el calor ganado como para el calor perdido.

Estos principios son útiles en los experimentos de medida de calores específicos.

3.5.2. Calor latente y cambios de fase

Hemos visto que si un cuerpo recibe calor experimenta un incremento de temperatura que depende de la capacidad calorífica del mismo.

Sin embargo, esto no ocurre cuando se produce un cambio de estado o cambio de fase. Lo que ocurre es que la energía suministrada se emplea en romper las fuerzas de cohesión de las moléculas y cambiar su estado, bien de sólido a líquido, bien de líquido a gaseoso. Aunque no cambia la temperatura de las moléculas, su energía sí aumenta, ya que disponen de mayor grado de libertad y crece su agitación. Podemos razonar a la inversa cuando, al enfriar, el cambio es de líquido a sólido o de gas a líquido.

Esta energía suministrada a las moléculas para que cambien de estado no se puede medir con un termómetro. Es necesario introducir el concepto de calor latente:

Calor latente de cambio de fase, L , es la cantidad de energía calorífica que absorbe o desprende, a una presión determinada, un gramo de masa para cambiar de estado.

En consecuencia, la energía necesaria para que una masa m cambie de estado será:

$$Q = mL$$

En la gráfica de la Figura 3.1 se muestra la evolución, a presión normal, que experimenta el hielo hasta llegar a la fase de vapor

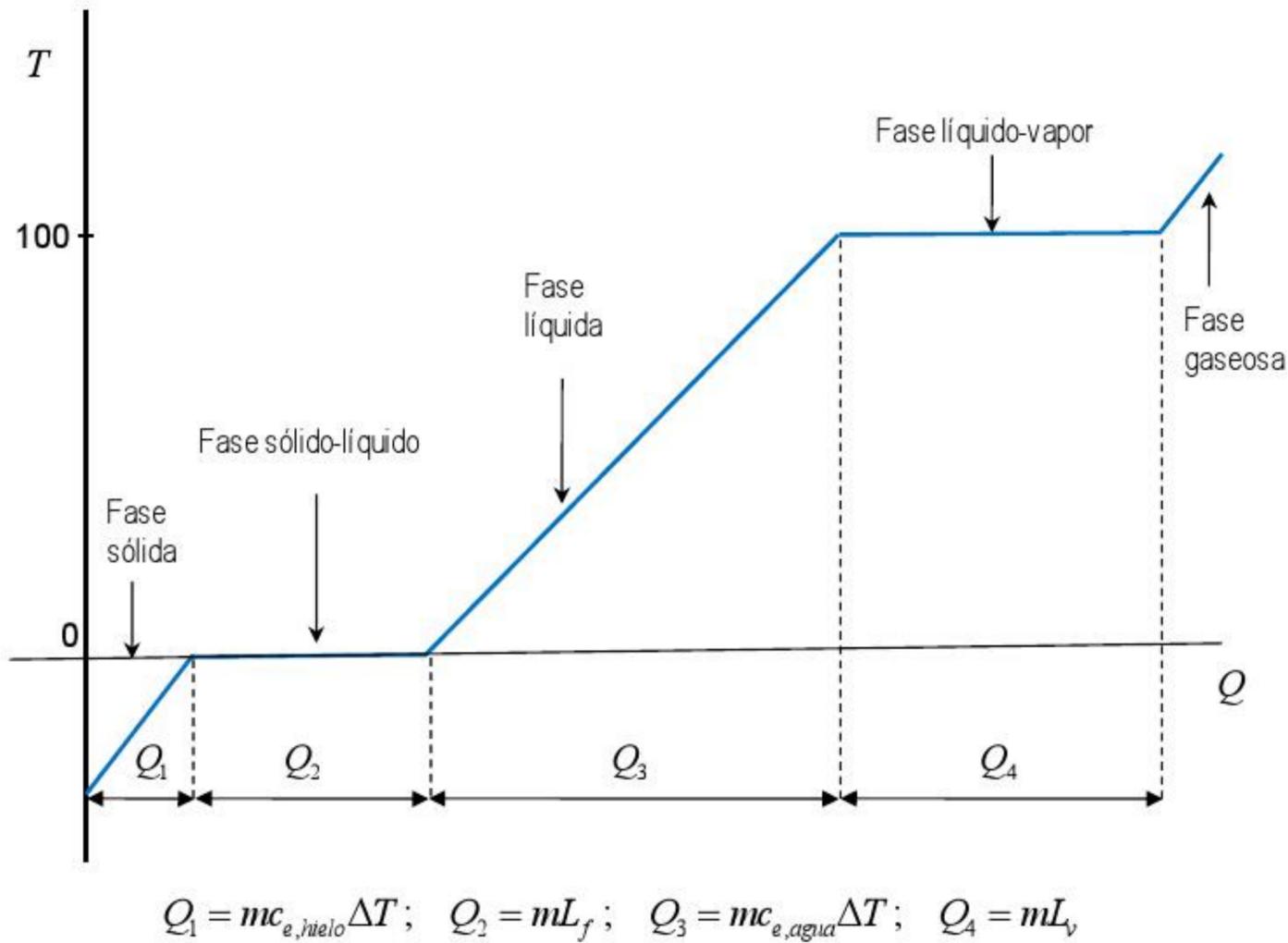


Figura 3.1. Calor absorbido por el agua al pasar de hielo a vapor.

Para el hielo $c_e = 0,5 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$, $L_f = 80 \text{ cal/g}$; para el agua líquida $c_e = 1 \text{ cal/g} \cdot ^\circ\text{C}$, $L_v = 539 \text{ cal/g}$.

3.6. Mecanismos de transferencia de calor

Existen tres formas diferentes de transmisión de la energía térmica de un lugar a otro: conducción, convección y radiación. Vamos a examinar cada uno de ellos.

3.6.1. Conducción

La energía se transmite como consecuencia de las interacciones entre átomos o moléculas. Por ejemplo, si se calienta uno de los extremos de una barra sólida, los átomos de esa zona vibran con mayor energía que los del extremo frío. Debido a la interacción con los átomos más próximos, esta energía se transporta a lo largo de la barra.

Supongamos una barra sólida de sección A uno de cuyos extremos se mantienen en un baño de vapor y el otro en un baño de hielo. La energía térmica fluirá del extremo caliente al frío llegando a alcanzar un estado estacionario. El cociente $\Delta T / \Delta x$ a lo largo de la barra se llama *gradiente de temperatura*.

Sea ΔT la diferencia de temperatura entre los extremos de un pequeño segmento de la barra, Δx . Si llamamos Q a la cantidad de calor que se transmite por conducción a lo largo de este trozo en un intervalo de tiempo, Δt , la tasa de conducción de calor, $Q / \Delta t$, se denomina *corriente térmica*, I . Se ha comprobado experimentalmente que I es proporcional al gradiente de temperatura y a la sección recta de la barra,

$$I = \frac{Q}{\Delta t} = kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

El coeficiente de proporcionalidad k , es la *conductividad térmica*. Se mide en $\text{W/m}\cdot\text{K}$. Depende del material y suele ser elevada para los metales, por ejemplo para el cobre $k = 401 \text{ W/m}\cdot\text{K}$; para maderas es bastante menor, por ejemplo para el roble $k = 0,15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. De ahí la diferente sensación cuando tocamos uno u otro tipo de objetos.

3.6.2. Convección

La convección es el transporte de energía térmica que se realiza simultáneamente con el transporte del propio medio. Es el responsable de las grandes corrientes oceánicas –corriente cálida del Golfo, corriente fría del Labrador– así como de la circulación global de la atmósfera.

La convección se clasifica en natural y forzada. En la convección forzada se obliga al fluido a moverse mediante medios externos, como un ventilador o una bomba. En la convección natural el movimiento del fluido es debido a causas naturales. En el caso más simple, surge cuando un fluido, gas o líquido, se calienta por debajo. Ello hace que se expande y eleve mientras que el fluido más frío se hunde. El modelo matemático de la convección es muy complejo, ya que el flujo depende del gradiente de temperatura y éste, a su vez, se ve influenciado por el propio flujo.

Por otra parte, el calor transmitido por convección desde un cuerpo a sus alrededores es proporcional al área del cuerpo y a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el fluido en el que se encuentra inmerso. Es posible escribir una ecuación para la energía térmica transportada por convección y definir un coeficiente de convección pero, por su complejidad, queda más allá del nivel del curso.

3.6.3. Radiación

Es la transferencia de calor por medio de ondas electromagnéticas. No se requiere de un medio para su propagación y la energía irradiada se mueve a la velocidad de la luz. Por ejemplo, el calor irradiado por el Sol se puede intercambiar entre la superficie solar y la superficie de la Tierra sin calentar el espacio de transición.

Josef Stefan de forma empírica y más tarde Boltzmann mediante un modelo matemático, dedujeron una ley que lleva sus nombres y que da la potencia radiada, P_r , por un cuerpo que se encuentra a una temperatura absoluta, T :

$$P_r = e\sigma AT^4 \quad \text{ley de Stefan-Boltzmann}$$

donde A es el área del cuerpo, e es la llamada *emisividad* y σ es una constante universal, constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es:

$$\sigma = 5,6703 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

Cuando la radiación incide sobre un objeto opaco, parte de la radiación se refleja y parte se absorbe. Los objetos de colores claros reflejan la mayor parte de la radiación visible, mientras que los oscuros la absorben en mayor proporción. El ritmo al que absorbe radiación un cuerpo viene dado por:

$$P_a = e\sigma AT_0^4$$

donde T_0 es la temperatura de la fuente de radiación.

Si un cuerpo emite más radiación que la que absorbe, se enfría, mientras que el medio que lo rodea se calienta. Lo contrario ocurre cuando el cuerpo absorbe más energía que la que emite. Podemos expresar la potencia neta radiada por un cuerpo a la temperatura T situado en un medio a temperatura T_0 como:

$$P_{\text{neto}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio térmico con su medio se cumple $T = T_0$, emitiendo radiación al mismo ritmo que la absorbe.

3.7. Equivalente mecánico del calor

Hemos admitido en todos nuestros desarrollos que el calor es una forma de energía; por tanto debe existir una relación entre las unidades en que se mide el calor y la energía mecánica. Joule, utilizando una rueda con paletas conectada a un conjunto de poleas con pesos en sus extremos pudo demostrar una relación precisa entre la energía mecánica de los pesos en las poleas y el aumento de la temperatura

del agua en el recipiente, debido a la rotación de las paletas, como se ilustra en la Figura 3.2. La equivalencia entre ambas unidades es:

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

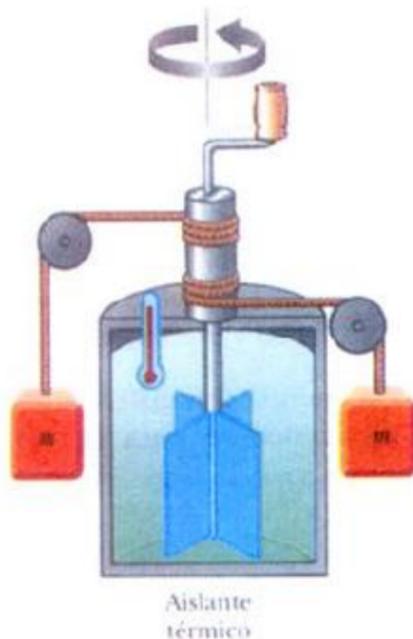


Figura 3.2. Experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor. Los pesos hacen rotar las aspas, provocando que la temperatura del agua se incremente.

Esto hay que tenerlo en cuenta cuando utilicemos variables en las que interviene la caloría y las pasemos a unidades SI. Por ejemplo, el calor latente de fusión del hielo $L_f = 80 \text{ cal/g} = 80 \times 4,184 \text{ J} / 10^{-3} \text{ kg} = 334720 \text{ J/kg}$.

3.8. Gas ideal: Propiedades y comportamiento

Los primeros estudios acerca del comportamiento de los gases se realizaron en el siglo XVII e hicieron posible que se formularan las llamadas *leyes de los gases*. Estas leyes se cumplen cuando el gas objeto de estudio se encuentra a baja presión; cuando ello ocurre, se dice que el gas tiene un comportamiento ideal. Este *gas ideal* cumple las condiciones siguientes:

- 1) Ocupa el volumen del recipiente que lo contiene.
- 2) Está formado por moléculas.
- 3) Estas moléculas se mueven individualmente y al azar en todas direcciones.
- 4) La interacción entre las moléculas se reduce sólo a su choque.
- 5) Los choques entre las moléculas son completamente elásticos (no hay pérdidas de energía).
- 6) Los choques son instantáneos (el tiempo durante el choque es cero).

Ley de los gases ideales:

Boyle descubrió que si se comprime un gas manteniendo su temperatura constante, la presión aumenta. Análogamente, si el gas se expande a temperatura constante, la presión disminuye. Esto lo podemos expresar con buena aproximación diciendo que el producto del volumen, V , por la presión, P , de un gas ideal permanece constante:

$$PV = \text{constante} \quad (\text{a } T \text{ constante})$$

que se denomina ley de Boyle. Hay una ley más general, que incluye como caso particular la de Boyle. Por una parte se ha comprobado que la temperatura absoluta de un gas es proporcional a su presión (a volumen constante); por otra, Gay-Lussac probó que la temperatura absoluta de un gas es proporcional a su volumen (a presión constante). Estos dos resultados pueden combinarse para dar la expresión:

$$PV = CT$$

donde C es una constante que como veremos es proporcional a la cantidad de gas. En efecto, supongamos dos recipientes idénticos, que contienen cada uno la misma cantidad de gas a la misma temperatura y presión. Si ponemos en comunicación ambos recipientes, nos encontraremos al final con una cantidad y un volumen doble de gas a la misma presión y temperatura que cuando estaban aislados. Hemos duplicado la magnitud PV/T duplicando la cantidad de gas. Por tanto, podemos escribir C como una constante k multiplicada por el número de moléculas del gas N ,

$$C = kN$$

Entonces, la ecuación anterior queda en la forma:

$$PV = NkT$$

que es la ley de los gases perfectos. La constante k se llama **constante de Boltzmann**. Experimentalmente se comprueba que es independiente del tipo de gas y su valor es:

$$k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Podemos transformar esta ley expresando la cantidad de gas en moles. Un *mol* de cualquier sustancia es la cantidad de la misma que contiene el número de Avogadro, $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ de átomos o moléculas. Si tenemos n moles de una sustancia, el número de moléculas es:

$$N = nN_A$$

Por lo que la ley de los gases ideales queda expresada en la forma:

$$PV = nN_A kT = nRT$$

donde $R = N_A k$ es la constante universal de los gases. Su valor es:

$$R = N_A k = 8,314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K}) = 0,082 \text{ atm}\cdot\text{l}/(\text{mol}\cdot\text{K})$$

La ecuación de los gases ideales relaciona las variables P, V , y T , es un ejemplo de una *ecuación de estado*. Cuando la presión del gas aumenta pasando a ser un gas real, esta ecuación deja de ser válida; sin embargo pueden deducirse ecuaciones más complejas, como la de van der Waals, que describen correctamente su comportamiento. En esta ecuación también intervienen las variables de estado P, V , y T , de manera que, conocidas dos de ellas, la tercera queda determinada por dicha ecuación.

Diagramas P-V: Tomando estas dos variables de estado como ejes de un sistema de referencia, el estado de un sistema quedará determinado por *un punto del plano PV*.

Se dice que el sistema sufre una transformación cuando varía la presión, el volumen o ambas cosas a la vez. El punto representativo describe en el diagrama una línea, llamada *línea de evolución*, que nos da una imagen de la transformación realizada.

Por ejemplo, supongamos que un gas ideal realiza una transformación a temperatura constante, conocida como transformación isotérmica. En este caso podemos poner:

$$P = nRT \frac{1}{V} = \text{cte} \frac{1}{V}$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes P-V. En la Figura 3.3 se muestra la línea de evolución para el caso de 1 mol de gas ideal a 300 K.

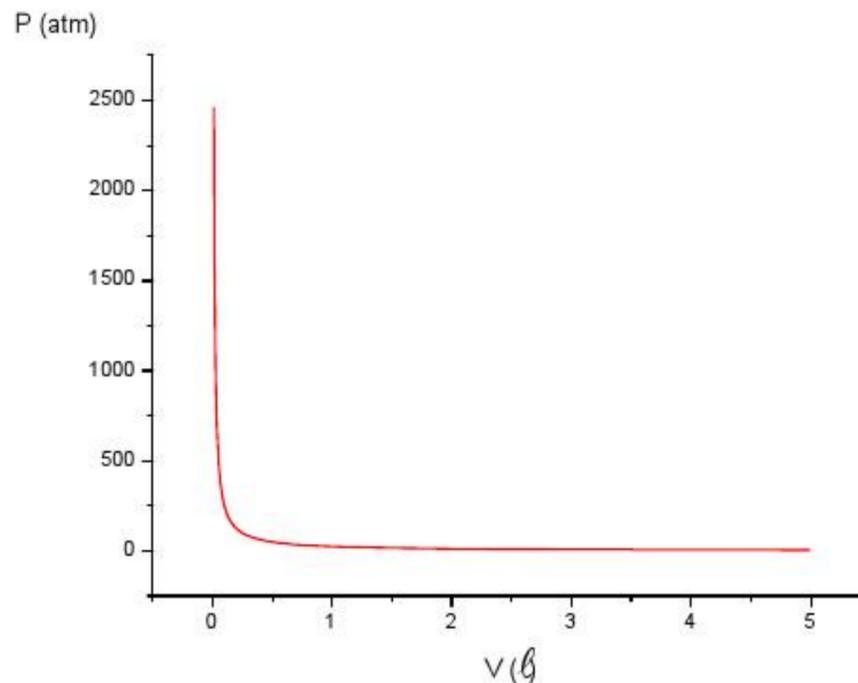


Figura 3.3. Diagrama P-V para una transformación isotérmica. $T = 300\text{K}$, $n = 1 \text{ mol}$.

Como un segundo ejemplo, supongamos que un gas se expande a presión constante, lo que constituye una *transformación isobárica*. Para ello imaginemos un gas encerrado en un recipiente con un émbolo de superficie S como se muestra en la Figura 3.4.



Figura 3.4. Trabajo de expansión de un gas a presión constante y diagrama P-V.

La fuerza que ejerce el gas sobre el émbolo será $F = PS$ dirigida hacia arriba. Si el émbolo experimenta un desplazamiento Δx , el trabajo realizado por el gas será:

$$W = F\Delta x = PS\Delta x = P\Delta V = P(V_2 - V_1)$$

Donde hemos tenido en cuenta que el cambio de volumen ha sido $\Delta V = S\Delta x$. El trabajo es positivo, ya que convenimos que cuando es el sistema el que realiza el trabajo este es de signo positivo. Gráficamente dicho trabajo es el área encerrada en el rectángulo formado por la línea de presión constante y el segmento entre V_1 y V_2 , como se puede comprobar en el diagrama de la Figura 3.4.

3.9. Energía interna de un sistema

Todo sistema tiene un contenido energético. Las moléculas que forman el sistema poseen distintos tipos de energía: cinética de traslación, de rotación, de vibración, etc. Las partículas cargadas de los átomos poseen también energía potencial eléctrica. La suma de todas las energías que poseen las moléculas y átomos de un sistema constituye la energía interna del mismo. Se representa por el símbolo U .

Debido a esta energía interna, un sistema puede realizar trabajo sin recibir calor del exterior.

A cada estado del sistema le corresponde una determinada cantidad de energía interna; si a través de varias transformaciones un sistema vuelve a su estado inicial, la energía interna no habrá variado. Por ello, *la energía interna es también una variable de estado*.

No se puede medir el valor absoluto de la energía interna de un sistema, pero es posible conocer sus variaciones usando del primer principio de la Termodinámica.

3.10. Primer principio de la Termodinámica

Hemos visto que la Termodinámica estudia la evolución de un sistema prescindiendo de su estructura, y considera tan sólo aquellas magnitudes que pueden medirse, como la presión, el volumen, la temperatura y el calor, y las relaciona por medio de leyes.

El primer principio de la Termodinámica es una generalización del principio de conservación de la energía que vimos en la primera unidad. Si el calor es una forma de energía, habrá que tenerlo en cuenta en la evaluación de la energía total de un sistema.

El primer principio de la Termodinámica lo podemos enunciar de la forma siguiente:

Cualquiera que sea la transformación que experimenta un sistema, la cantidad de calor, ΔQ , que el sistema recibe, se invierte en parte en realizar un trabajo exterior, ΔW , y el resto es absorbido por el sistema para aumentar su energía interna, ΔU .

Matemáticamente, el primer principio se expresa mediante la ecuación:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Decimos que una transformación es infinitesimal cuando se produce variaciones infinitesimales en las magnitudes Q , U , W . Para una transformación de este tipo, el primer principio se escribe en la forma:

$$\delta Q = dU + \delta W$$

En esta ecuación, el símbolo δ aplicado al calor y al trabajo significa que una cantidad infinitesimal de calor o trabajo no es una diferencial exacta en sentido matemático, porque tanto el calor como el trabajo no son variables de estado de un sistema. Por tanto, no tiene sentido decir “el calor de un sistema” o “el trabajo de un sistema”. *Tanto el calor como el trabajo son, simplemente, maneras de modificar la energía interna.*

Una consecuencia de este principio es que nos permite averiguar de qué depende la energía interna de un gas perfecto. Consideremos el siguiente experimento ideado por Joule: Dentro de un calorímetro se colocan dos recipientes, A y B , comunicados mediante un tubo con llave de paso. El recipiente A contiene un gas perfecto y en el recipiente B se ha hecho el vacío. Todo el sistema está a la misma temperatura, que permanece constante durante el proceso.

Si se abre la llave, parte del gas pasará de A a B hasta alcanzar la misma presión en ambos recipientes. Tenemos que:

a) El proceso se ha realizado tan rápidamente que no hay transferencia de calor $\rightarrow \Delta Q = 0$.

b) El gas se ha expandido libremente, sin vencer ninguna fuerza exterior, puesto que B estaba vacío; luego el trabajo realizado es nulo $\rightarrow \Delta W = 0$.

Si aplicamos el primer principio concluimos que

$$\Delta U = 0$$

la energía interna permanece constante mientras que el volumen y la presión han variado. Podemos asegurar que *la energía interna de un gas perfecto no depende ni del volumen ni de la presión, sólo depende de su temperatura* (ley de Joule).

3.11. Procesos (o transformaciones) termodinámicos

Aunque ya hemos visto en los diagramas P-V algunos ejemplos para gases ideales, vamos a completar el estudio en esta sección, teniendo en cuenta las implicaciones del primer principio. Estas transformaciones deben transcurrir desde un estado de equilibrio inicial a otro final; es decir, que las magnitudes que sufren una variación al pasar de un estado a otro deben estar perfectamente definidas en dichos estados inicial y final. De esta forma los procesos termodinámicos pueden ser interpretados como el resultado de la interacción de un sistema con otro tras ser eliminada alguna ligadura entre ellos, de forma que finalmente los sistemas se encuentren en equilibrio (mecánico, térmico y/o material) entre sí.

3.11.1. Proceso isobárico

Si la presión no cambia durante un proceso, se dice que es isobárico. Como ya hemos visto, en este caso el trabajo realizado viene dado por $W = P(V_2 - V_1)$ y en consecuencia la variación de la energía interna será:

$$U_2 - U_1 = \Delta Q - P(V_2 - V_1)$$

En el diagrama P-V el proceso viene representado por una línea paralela al eje horizontal como se ve en el diagrama de la Figura 3.4.

3.11.2. Proceso isotérmico

Es un proceso en el cual la temperatura permanece constante durante la operación.

La compresión o expansión de un **gas ideal** en contacto permanente con un **termostato** es un ejemplo de proceso isoterma, y puede llevarse a cabo colocando el gas en contacto térmico con otro sistema de capacidad calorífica muy grande y a la misma temperatura que el gas; este otro sistema se conoce como *foco caliente*. De esta manera, el calor se transfiere muy lentamente, permitiendo que el gas se expanda

realizando trabajo. Como la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura y ésta permanece constante en la expansión isoterma, el calor tomado del foco es igual al trabajo realizado por el gas:

$$\Delta Q = \Delta W$$

En el diagrama P-V el proceso viene representado por una hipérbola como la representada en la Figura 3.3.

3.11.3. Proceso isocórico

Es un proceso en el que el volumen permanece constante $\rightarrow \Delta V = 0$. Esto implica que el proceso no realiza ningún trabajo, $\Delta W = P\Delta V = 0$. Aplicando el primer principio, podemos deducir que:

$$\Delta Q = \Delta U$$

es decir, todo el **calor** que transfiramos al sistema se empleará en variar su energía interna U . Si la cantidad de **gas** permanece constante, entonces el incremento de energía será proporcional al incremento de temperatura.

En el diagrama P-V el proceso viene representado por una línea paralela al eje vertical.

3.11.4. Proceso adiabático

Es aquel en el que el sistema no intercambia calor con su entorno $\rightarrow \Delta Q = 0$. La expresión del primer principio de la termodinámica se reduce a:

$$0 = \Delta U + \Delta W \Rightarrow \Delta U = -\Delta W$$

La ecuación matemática que describe un proceso adiabático es de la forma:

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

donde γ vale $5/3$ para gases monoatómicos y $1,4$ para gases diatómicos.

UNIDAD 4. OSCILACIONES Y ONDAS

En las unidades anteriores se han examinado distintos tipos de energía: mecánica, térmica, gravitatoria, etc. En esta unidad trataremos de la transmisión de la energía. *La energía se puede transmitir de dos formas: mediante el desplazamiento de los cuerpos portadores de energía o mediante ondas.*

Si a un cuerpo en reposo se le suministra energía mecánica, este cuerpo tiende a ponerse en movimiento transformando la energía suministrada en energía cinética, energía que puede comunicar a otros cuerpos si colisiona o está ligado a ellos. Por ejemplo, el péndulo de Newton, las bolas de billar, la tracción de una carreta, etc.

Pero la energía también se puede transmitir sin que el cuerpo se desplace. Basta con que irradie su energía. Esta irradiación de energía recibe el nombre de onda. Por ejemplo, las ondas sonoras, las ondas luminosas, etc. En todos los casos se trata de energía que se propaga asociada a dicha onda.

4.1. Movimiento armónico simple

4.1.1. Sistemas que oscilan

El movimiento oscilatorio corresponde a la situación de un sistema de partículas que está sometido tanto a fuerzas conservativas como –en el caso más general– a fuerzas disipativas, con un número cualquiera n de grados de libertad, y de forma que durante un intervalo ΔT de tiempo, el mínimo de su energía potencial se encuentra dentro de un entorno, simétrico o asimétrico, repitiéndose periódicamente los valores de tal entorno en el movimiento real del sistema.

Tipos de sistemas oscilantes:

Si llamamos V a la función potencial de las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema de partículas oscilante, se tiene que V puede depender o no del tiempo.

Llamaremos oscilador forzado a un sistema oscilante en el que las fuerzas conservativas dependen del tiempo. Siempre es posible descomponer, en este caso, la función potencial en suma de una parte independiente del tiempo y otra parte que sí depende del tiempo.

En lo que respecta a las fuerzas no conservativas, es decir, a las fuerzas disipativas que actúan sobre el sistema oscilante, el caso corresponde al oscilador que llamaremos oscilador amortiguado, o bien, oscilador con amortiguamiento.

Se define como oscilador libre a un sistema oscilante que no es forzado ni amortiguado, es decir, un oscilador sobre el que no actúan fuerzas conservativas dependientes del tiempo ni tampoco está sometido a fuerzas de disipación.

Resumiendo, podemos clasificar todos estos casos en:

- Oscilador no forzado ni amortiguado (oscilador libre).
- Oscilador no forzado pero con amortiguamiento
- Oscilador forzado sin amortiguamiento.
- Oscilador forzado y amortiguado.

4.1.2. El oscilador armónico simple

Es el tipo de movimiento más sencillo de oscilación. Se llama así porque se puede representar mediante *funciones armónicas*, como el seno o el coseno, de una sola variable. Son unidimensionales (normalmente a lo largo de un eje cartesiano). Cualquier otro movimiento más complejo se puede expresar como superposición de movimientos armónicos simples.

Un ejemplo que ilustra claramente este movimiento es el de un muelle elástico sujeto por un extremo de una barra; del extremo libre cuelga una masa. Si, partiendo de su posición de reposo, estiramos y después soltamos el muelle, la masa ejecuta una serie de oscilaciones en torno a dicha posición. Vamos a caracterizarlo matemáticamente.

Movimiento armónico simple (MAS): *Es un movimiento periódico de vaivén a ambos lados de una posición central de equilibrio.* Este desplazamiento viene descrito por la ecuación:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

- A es la amplitud del movimiento, es decir, el valor máximo que puede alcanzar el desplazamiento. Se mide en unidades de longitud

- ω es la frecuencia angular o pulsación; $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia o número de veces por segundo que se realiza la oscilación. La frecuencia angular se expresa en rad/s y para la frecuencia f se utiliza el hercio (Hz). Recordemos que $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

- $\omega t + \varphi$ es la fase del movimiento y φ la fase inicial (para $t = 0$).

-El tiempo requerido para realizar una oscilación completa se llama período $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$.

En la Figura 4.1 se representa la posición de un móvil para el caso $A = 6 \text{ cm}$, $f = 0,25 \text{ Hz}$, $\varphi = 0$. Observamos el comportamiento típico de la función coseno de periodo $T = 4 \text{ s}$. Para $t = 0$ la posición del móvil está en su valor máximo, $x = A$; después disminuye hasta alcanzar el valor cero en $t = 1 \text{ s}$; a continuación el valor de x se hace negativo de forma que en $t = 2 \text{ s}$ el móvil se encuentra en $x = -A$; en $t = 3 \text{ s}$ el móvil pasa de nuevo por un valor nulo; y finalmente para $t = T = 4 \text{ s}$

el móvil vuelve a la posición que tenía en $t = 0$ s. A partir de ese instante el movimiento se repite periódicamente.

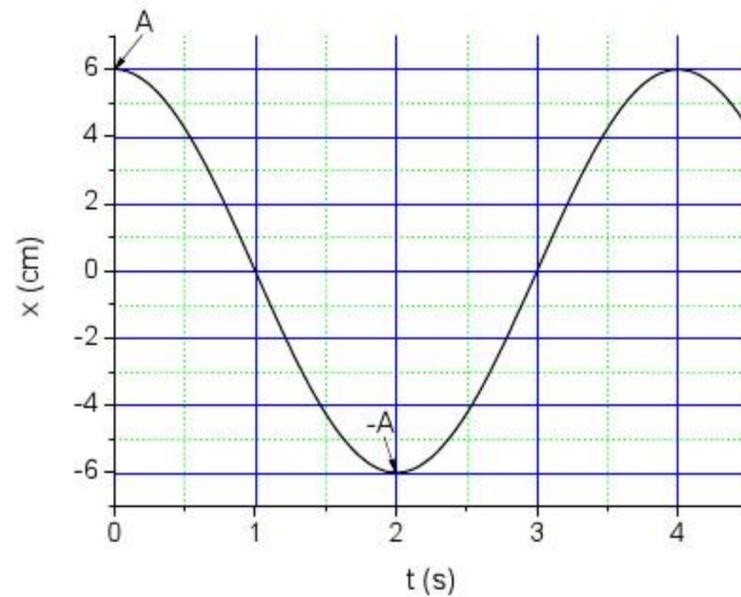


Figura 4.1. Gráfica de la posición en un MAS: $T = 4$ s; $A = 6$ cm, fase inicial nula.

Velocidad del m.a.s: Se obtiene derivando la ecuación de movimiento,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

Es también una función periódica del tiempo. En la Figura 4.2 se representa la gráfica de velocidad asociada al movimiento de la Figura 4.1.

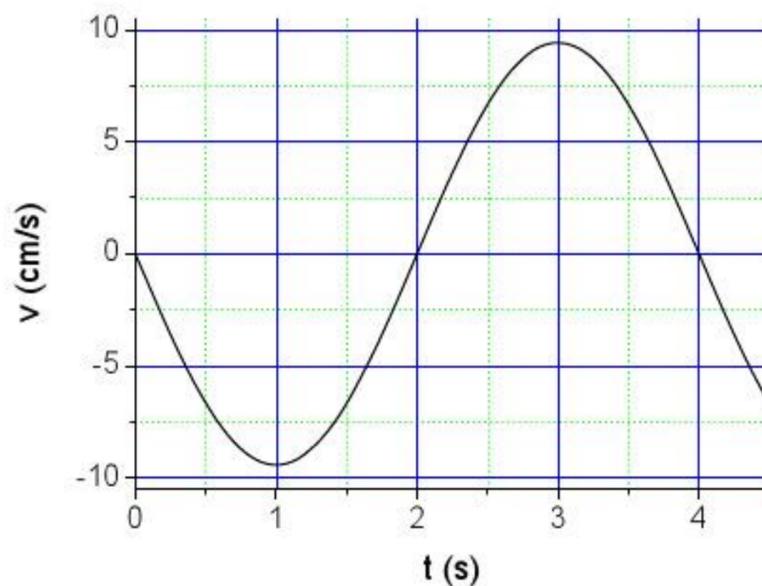


Figura 4.2. Gráfica de la velocidad de un MAS. Mismos datos de la Figura 4.1.

Vemos que la velocidad es nula en el instante $t = 0$; en $t = 1$ s alcanza el máximo valor negativo; en $t = 2$ s vuelve a anularse; en $t = 3$ s alcanza el máximo positivo; y retorna al valor inicial en $t = T = 4$ s.

Aceleración del m.a.s: Se obtiene derivando la ecuación de la velocidad,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

Observamos que esta función reproduce el comportamiento de la posición multiplicado por el factor $-\omega^2$. Su gráfica se dibuja en la Figura 4.3.

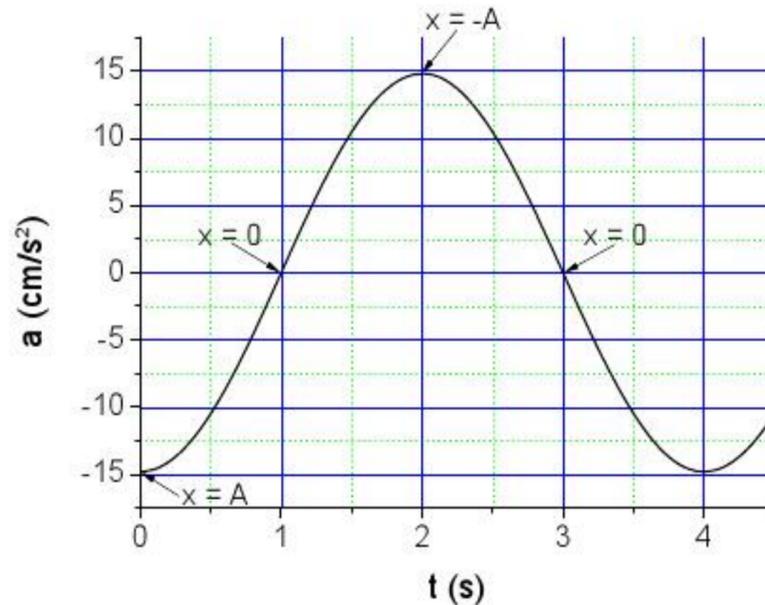


Figura 4.3. Gráfica de la aceleración de un MAS. Mismos datos de la Figura 4.1.

A la vista de este comportamiento, podemos decir que en el movimiento armónico la aceleración, en valor absoluto, aumenta cuando el móvil se dirige hacia los extremos ($x = \pm A$) y disminuye cuando se dirige hacia el centro $x = 0$.

Por último, hay que señalar que se puede hacer un estudio análogo (como el que se realiza en varios textos de Física), utilizando para describir la posición en un MAS una función seno:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

y a partir de ella deducir la velocidad y aceleración.

Dinámica del MAS

Para averiguar la naturaleza de la fuerza que produce el MAS partimos de los siguientes hechos:

- 1) *La fuerza depende de la posición del móvil que vibra*, puesto que la aceleración depende de dicha posición.
- 2) Solamente vibran los cuerpos elásticos. *La fuerza es, por tanto, elástica.*
- 3) Los cuerpos tienden a adquirir la forma y posición más estables. Por ello *reaccionan contra las fuerzas deformadoras*. Estas fuerzas que reaccionan son las fuerzas elásticas, que también se denominan *fuerzas recuperadoras*. Van dirigidas siempre hacia la posición de equilibrio y por tanto son *fuerzas centrales*.

- 4) El movimiento vibratorio se inicia cuando se rompe el equilibrio entre la fuerza deformadora y la recuperadora.

Veamos esto con el ejemplo mencionado anteriormente. La Figura 4.4(a) muestra un esquema del muelle: cuando colgamos un peso en su extremo libre el muelle se alarga una longitud ℓ hasta que la fuerza recuperadora, $F_r = -k\ell$, iguala al peso. Una vez establecido el equilibrio, alargamos más el muelle tirando de él con una fuerza F_d ; el muelle reacciona con una fuerza recuperadora, \vec{F}_r' , para restablecer de nuevo el equilibrio, Figura 4.4(b). Si soltamos el cuerpo, este empezará a oscilar porque se ha roto el equilibrio, Figura 4.4(c).

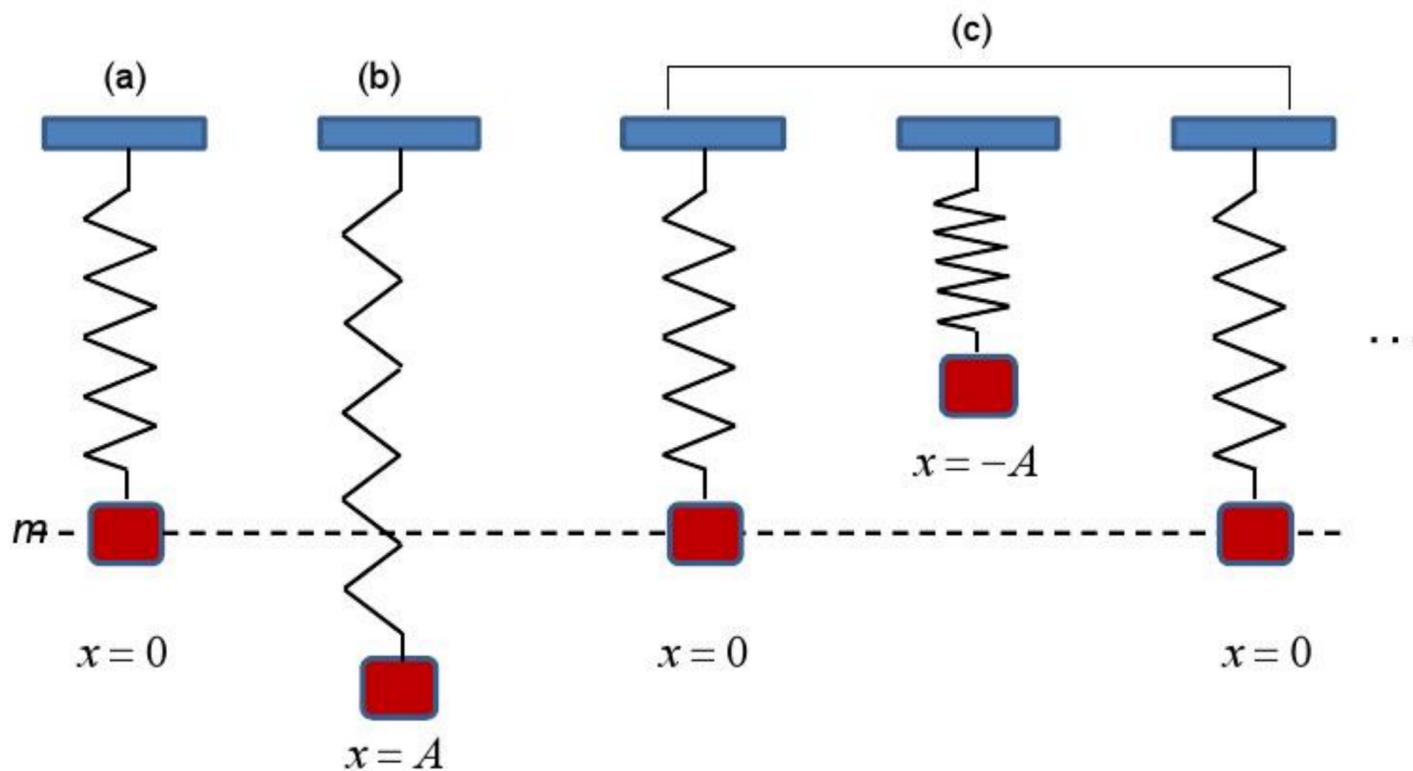


Figura 4.4. Esquema del análisis de la dinámica de un MAS generado al soltar un muelle del que se suspende una masa m . En (a) el muelle se ha alargado una longitud ℓ para compensar el peso.

Analizando la dinámica obtenemos que:

- ♣ Para la posición (a) se cumple:

$$mg = F_r = k\ell, \quad (\text{ambos módulos se igualan}).$$

Esta igualdad nos permite calcular el valor de la constante k :

$$k = \frac{mg}{\ell}$$

k mide el grado de elasticidad del muelle y se llama *constante recuperadora*, su unidad es N/m.

- ♣ Para la posición (b) se establece el equilibrio cuando:

$$mg + F_d = F_r \rightarrow mg + F_d = k(\ell + A)$$

siendo A el alargamiento producido por la fuerza F_d .

♣ En la posición (c) al cesar la fuerza deformadora F_d se inicia el movimiento hacia ambos lados de la posición de equilibrio (a) con una amplitud A .

La fuerza que se ejerce en cada posición x será:

$$F = -kx = -kA \cos \omega t$$

El signo menos indica que la fuerza se opone al incremento del desplazamiento. Como,

$$F = ma = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 x$$

se puede obtener una relación entre la masa, la constante recuperadora y la frecuencia angular:

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esta ecuación fija el valor de la frecuencia de oscilación en función de k y m .

4.2. Energía de un oscilador mecánico

Recibe el nombre de oscilador mecánico todo sistema material que realiza un movimiento armónico.

Posee dos tipos de energía:

- 1) *Cinética* porque el sistema está en movimiento.
- 2) *Potencial* porque el movimiento armónico es producido por una fuerza conservativa.

Para hallar la energía cinética, sustituimos en su fórmula el valor de la velocidad:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2 \omega t$$

Haciendo $m\omega^2 = k$ y teniendo en cuenta que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ queda:

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2(1 - \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

La energía cinética depende de las características del muelle, k , del cuadrado de la amplitud del movimiento y varía periódicamente con el cuadrado del desplazamiento. Es máxima cuando $x=0$ y nula para $x=A$.

La energía potencial viene dada por el trabajo realizado en contra de la fuerza conservativa para trasladar la partícula desde la posición x hasta la de equilibrio:

$$E_p = \int_x^0 \vec{F} \cdot d\vec{x} = -\int_x^0 kx dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

Vemos que la energía potencial es proporcional al cuadrado de la amplitud, depende de la posición y tiene su valor máximo en $x = \pm A$. Varía periódicamente y en contraposición a la energía cinética.

Energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}kA^2$$

En el MAS la energía mecánica permanece constante, ello es consecuencia de la naturaleza de la fuerza que es conservativa. En el caso de que existiera rozamiento, la amplitud se va reduciendo paulatinamente hasta cesar el movimiento.

4.3. Movimiento armónico simple y movimiento circular uniforme

Si analizamos conjuntamente los dos movimientos veremos que hay una estrecha relación entre ambos. La Figura 4.5a muestra el movimiento de una partícula a lo largo de una circunferencia de radio A con velocidad angular ω y fase inicial nula. Al cabo de un tiempo t , la partícula se ha desplazado un ángulo ωt y se encuentra en la posición indicada.

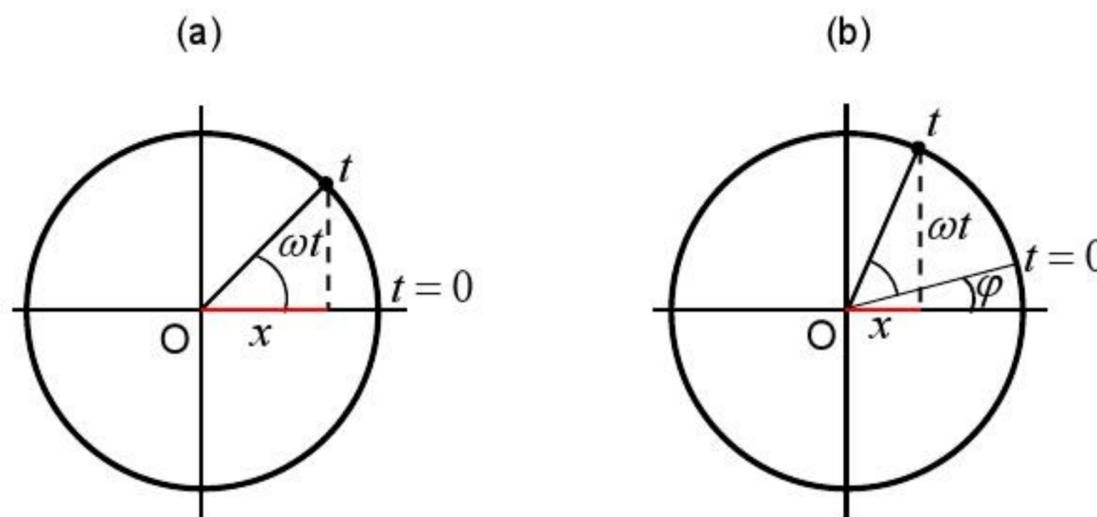


Figura 4.5. Proyección de un movimiento circular uniforme de radio A sobre el eje horizontal: (a) fase inicial nula; (b) fase inicial φ .

Si se proyecta sobre el eje horizontal dicha posición, se obtiene:

$$x = A \cos \omega t$$

Si suponemos que en el instante inicial la fase es φ , como se ilustra en la Figura 4.5b,

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

que es la ecuación general de un MAS. Concluimos que *el movimiento armónico simple es la proyección sobre un diámetro de un movimiento circular uniforme*.

4.4. Ondas mecánicas: Clasificación

En esta sección vamos a completar el estudio analizando la propagación de ondas mecánicas. Veremos que éstas se generan cuando se produce una perturbación en un medio elástico, como por ejemplo el aire, el agua, una cuerda tensa, etc. Decimos que *la onda es armónica cuando la propagación a través del medio es un movimiento vibratorio armónico*.

Cuando una cuerda tensa la ponemos a oscilar hacia arriba y hacia abajo, la perturbación se propaga a lo largo de la cuerda en forma de impulso desde el extremo libre hasta el extremo fijo. Su propagación surge de la interacción de cada segmento de la cuerda con los adyacentes. Estos *oscilan en dirección perpendicular* a la cuerda y, por tanto, a la dirección de propagación de la onda. Una *onda* de este tipo se dice que es *transversal*. Por otra parte, cuando la perturbación es *paralela a la dirección de propagación* se dice que es una *onda longitudinal*. Las ondas sonoras pertenecen a este tipo.

Hay que distinguir entre *onda* y *tren de ondas*. Por ejemplo, cuando tiramos hacia arriba de una cuerda y la soltamos, hemos producido un impulso: se trata de una sola onda. Todos los segmentos de la cuerda están en reposo hasta que les llega el impulso. En ese momento oscilan durante un corto tiempo y después vuelven al reposo. Si en lugar de tirar de la cuerda una vez, la movemos hacia arriba y hacia abajo continuamente, estaremos produciendo una sucesión o tren de ondas, como se ve en la Figura 4.6. Todos los segmentos de la cuerda estarán en movimiento a partir del instante en que llegue la primera perturbación.

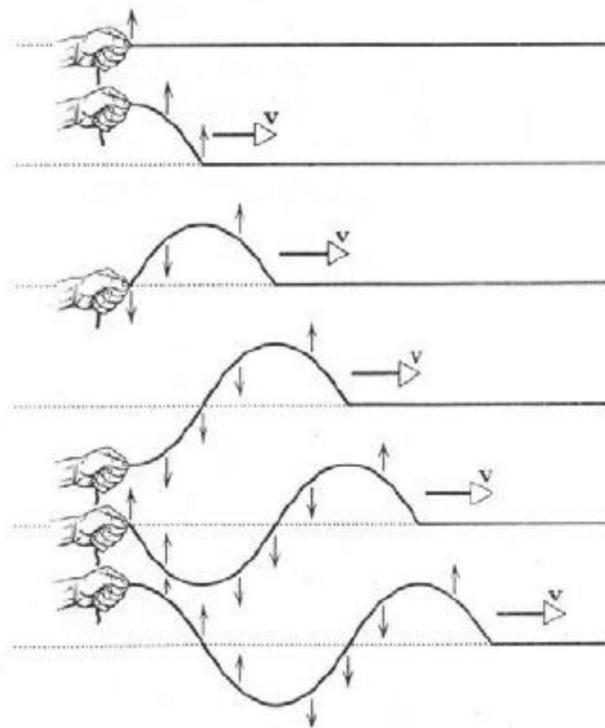


Figura 4.6. Tren de ondas producido al tirar de una cuerda hacia arriba y hacia abajo continuamente.

En general, cuando hablemos de propagación nos referiremos a un tren de ondas. Observemos que *para producir un tren de ondas es necesario suministrar energía continuamente al centro emisor.*

Atendiendo al número de dimensiones en que se propagan tenemos: a) Ondas unidimensionales; b) ondas bidimensionales; c) ondas tridimensionales. Las primeras se propagan en una sola dirección, las segundas en un plano y las terceras en todo el espacio.

4.4.1. Longitud de onda, amplitud y velocidad de propagación

Longitud de onda, λ , es la distancia que se ha propagado la onda en un periodo, es decir, mientras el centro emisor ha efectuado una vibración completa. También se define como la distancia entre dos puntos consecutivos de una onda que se encuentran en el mismo estado de vibración (Figura 4.7).

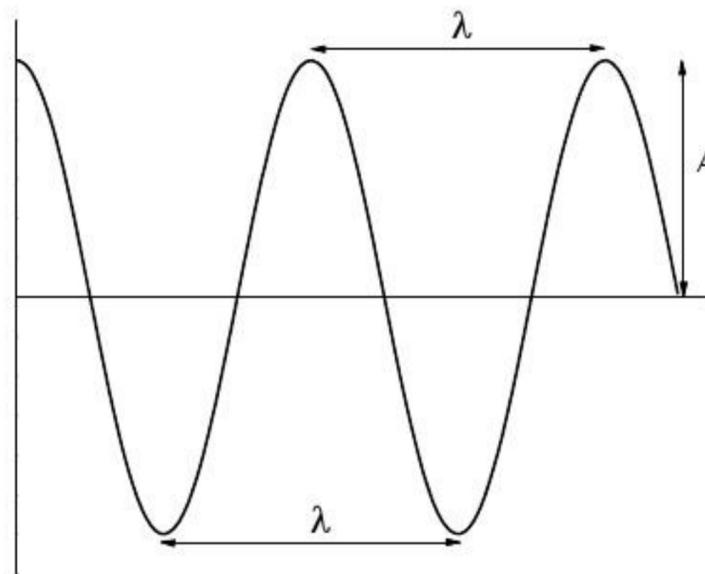


Figura 4.7. Longitud de onda y amplitud.

Amplitud, A , es la elongación máxima con que vibran las partículas del medio. También se define como la máxima distancia entre un punto de la onda y su posición de equilibrio.

La *velocidad de propagación o velocidad de fase, v* , depende de las características del medio; está relacionada con el periodo y la longitud de onda por medio de la expresión:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

Ejemplos

- Velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda: $v = \sqrt{\frac{F}{\eta}}$;

F = tensión de la cuerda en N.

η = masa por unidad de longitud de la cuerda en kg/m.

- Velocidad de una onda longitudinal en un sólido: $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$

Y = módulo de Young en N/m^2 .

ρ = densidad en kg/m^3 .

- Velocidad del sonido en un gas: $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

γ = coeficiente adiabático el gas. Para el aire, $\gamma = 1,4$.

R = constante de los gases en $\text{atm}\cdot\text{l}/(\text{mol}\cdot\text{K})$

T = temperatura del gas en K.

M = masa molecular del gas en kg/mol .

Número de onda, $k = 2\pi / \lambda$. Representa el número de longitudes de onda contenidas en 2π metros.

4.4.2. Ecuación de onda

Consideremos una cuerda larga tensada en la dirección del eje x y en la cual avanza una onda transversal. En el instante $t = 0$, la forma de la cuerda se puede representar por:

$$y = f(x) \quad , \quad t = 0$$

siendo y el desplazamiento vertical o elongación de la cuerda. En la Figura 4.8a se muestra un ejemplo de esta situación. Al cabo de un tiempo t , la onda avanza por la cuerda hacia la derecha sin cambiar de forma y se encuentra a una distancia vt del origen, Figura 4.8.b. Por tanto, la ecuación de la curva en ese instante será:

$$y = f(x - vt) \quad , \quad t = t$$

Esta ecuación nos asegura la misma forma de onda que teníamos en $t = 0$.

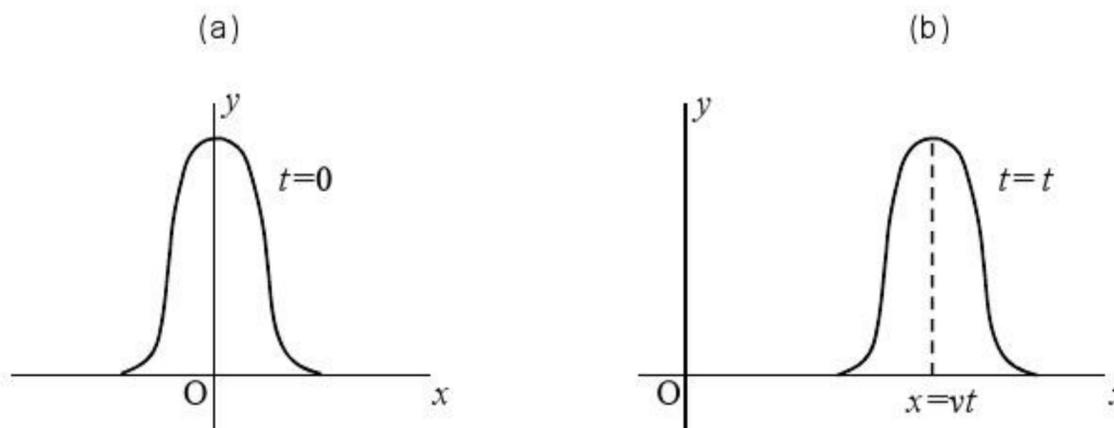


Figura 4.8. (a) Forma de onda en el instante $t = 0$; (b) Ídem en un instante $t > 0$, $x = vt$.

Es claro que si quisiéramos representar una onda que avanzara hacia la izquierda, $x < 0$, escribiríamos:

$$y = f(x + vt) \quad , \quad t = t$$

porque en este caso x se va haciendo cada vez más negativa a medida que t aumenta.

Notemos que para cualquier valor fijo del tiempo t , la ecuación da el valor de y en función de x , nos da una fotografía del instante. Por otro lado, si enfocamos la atención en un punto fijo x , la ecuación describe cómo varía la elongación y al ir transcurriendo el tiempo.

Consideremos una forma particular de onda. Supongamos que en $t = 0$ tenemos en la cuerda un tren de ondas dado por:

$$y = A \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right)$$

La máxima elongación es la amplitud, A , de esta función seno. El valor de la elongación, y , es el mismo en x que en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, etc., donde λ representa la longitud de onda (Figura 4.7). Al cabo de un tiempo t , la onda se mueve a la derecha con velocidad v y por tanto su ecuación de onda será ahora:

$$y = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right]$$

Para ponerla en una forma más conveniente recordemos que la longitud de onda en función del periodo T es:

$$\lambda = vT$$

Entonces,

$$y = A \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

Donde se ve que el valor de y se repite al cabo de los múltiplos de T . Para expresar esta ecuación en la forma más conocida, introducimos el número de ondas y la frecuencia angular. Recordemos que éstos vienen dados por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

En función de estas cantidades, la ecuación de onda queda:

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (*)$$

Si la onda viaja hacia la izquierda su expresión será:

$$y = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) \quad (**)$$

Las expresiones (*) y (**) son las ecuaciones que representan una *onda viajera* a lo largo del eje x en uno u otro sentido. Llevan implícitas la suposición de que la fase es nula en $t = 0, x = 0$. En el caso más general de que la fase valga φ se tiene,

$$y = A \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)$$

que son útiles a la hora de considerar casos especiales como la superposición de ondas.

4.5. Energía del movimiento ondulatorio

Cuando hablamos de la energía asociada a la propagación de una onda, es esencial tener en cuenta que *las partículas que transmiten la energía no se desplazan con la onda*. Solamente vibran a ambos lados de su posición de equilibrio; esto es fácil de comprobar en una playa a la que se acercan olas: si colocamos un corcho en el agua veremos que al alcanzarlo una ola, el corcho sube y baja hasta recuperar al cabo de un tiempo su posición de equilibrio; pero no se desplaza con la ola.

Las ondas mecánicas van disminuyendo de amplitud a medida que la perturbación se propaga. Ello es debido a las siguientes razones:

- 1) El grado de elasticidad del medio. Si el medio es poco elástico, se perderá energía en deformaciones.
- 2) El rozamiento viscoso entre partículas del medio (fluido).
- 3) Si la propagación es bidimensional o tridimensional, la energía de la fuente emisora se va repartiendo, a medida que avanza, entre un mayor número de partículas.

En los dos primeros casos se habla de *amortiguamiento* y en el tercero de *atenuación*.

Para ver las características de la energía, vamos a suponer que el medio es perfectamente elástico y de viscosidad nula, para centrarnos sólo en la atenuación. Necesitamos, además, definir el concepto de frente de onda: Se denomina **frente de onda** al lugar geométrico en que los puntos del medio son alcanzados en un mismo instante por una determinada onda. Matemáticamente se expresa como el conjunto de puntos que se encuentran en la misma fase; para una onda que avanza en la dirección x :

$$kx - \omega t + \varphi = \text{constante}$$

Supongamos una partícula ‘fuente’ en el origen de coordenadas que ejecuta un MAS. Esta partícula posee una energía mecánica que, según vimos en la sección 4.2, está dada por:

$$E_0 = E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 A_0^2 = \frac{1}{2} m_0 4\pi^2 f^2 A_0^2 = 2m_0 \pi^2 f^2 A_0^2$$

Donde m_0 es la masa de la partícula y A_0 la amplitud del MAS. Esta energía se irradia en todas las direcciones en forma de ondas esféricas con una velocidad v . La energía irradiada se va repartiendo sobre superficies esféricas concéntricas cuyo centro es la fuente emisora. Al cabo de un tiempo t_1 la energía se habrá repartido entre las partículas que forman el frente de onda de radio $r_1 = vt_1$. Ocurrirá lo mismo con el frente de onda de radio $r_2 = vt_2$ al cabo del tiempo t_2 . Al no haber pérdida de energía se cumple

$$E_0 = E_1 = E_2$$

siendo E_0 la energía del centro emisor, E_1 la energía que poseen las partículas del frente de onda 1, y E_2 la energía que poseen las partículas del frente 2. Aplicando la anterior fórmula de la energía se tiene:

$$E_1 = 2m_1\pi^2 f^2 A_1^2, \quad m_1, A_1 \text{ masa y amplitud de las partículas del frente 1.}$$

$$E_2 = 2m_2\pi^2 f^2 A_2^2, \quad m_2, A_2 \text{ masa y amplitud de las partículas del frente 2.}$$

Teniendo en cuenta que la superficie de una esfera es $S = 4\pi r^2$, una capa esférica de radio r y espesor dr , ocupará un volumen $dV = 4\pi r^2 dr$; si lo multiplicamos por la densidad del medio podemos poner las masas en función de estas cantidades:

$$dm_1 = 4\pi r_1^2 \rho dr$$

$$dm_2 = 4\pi r_2^2 \rho dr$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de las energías queda:

$$dE_1 = 8\pi^3 r_1^2 \rho f^2 A_1^2 dr$$

$$dE_2 = 8\pi^3 r_2^2 \rho f^2 A_2^2 dr$$

Como ambas son iguales se cumplirá:

$$r_1^2 A_1^2 = r_2^2 A_2^2 \quad \rightarrow \quad r_i A_i = \text{constante}$$

Del estudio realizado concluimos que:

- 1) La energía que propaga una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.
- 2) La amplitud de la onda en un punto es inversamente proporcional a la distancia de dicho punto al centro emisor.

La onda se va atenuando y la amplitud con que vibran las partículas disminuye al alejarnos de la fuente.

Intensidad de una onda

Se llama *intensidad* de un movimiento ondulatorio en un punto a *la cantidad de energía por unidad de tiempo, que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie colocada en dicho punto.*

$$I = \frac{E}{S \cdot t} \quad \text{en W/m}^2$$

Llevando esta definición a nuestro caso se tiene:

Intensidad en el frente de onda 1:

$$I_1 = \frac{E_1}{S_1 t} = \frac{8\pi^3 r_1^2 \rho f^2 A_1^2 dr}{4\pi r_1^2 t} = \frac{2\pi^2 r_1^2 \rho f^2 A_1^2 dr}{t}$$

Intensidad en el frente de onda 2:

$$I_2 = \frac{E_2}{S_2 t} = \frac{8\pi^3 r_2^2 \rho f^2 A_2^2 dr}{4\pi r_2^2 t} = \frac{2\pi^2 r_2^2 \rho f^2 A_2^2 dr}{t}$$

Dividiendo miembro a miembro y teniendo en cuenta la relación entre radios y amplitudes de los frentes resulta:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Concluimos que:

- 1) La intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.
- 2) La intensidad en un punto es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud en dicho punto.

A medida que la onda se aleja del centro emisor su intensidad disminuye hasta que a una distancia suficientemente grande deja de ser perceptible.

4.6. El principio de superposición

Se ha comprobado experimentalmente que, para muchas clases de ondas, *dos o más ondas pueden atravesar el mismo espacio independientemente unas de otras.* Por ejemplo, cuando oímos música podemos distinguir claramente las notas de los distintos instrumentos que componen la orquesta.

El hecho de que las ondas actúen independientemente significa que el movimiento de cualquier partícula del medio transmisor es la suma de los movimientos que le imprimirían cada onda por separado. Este proceso de suma vectorial de las elongaciones se denomina superposición. Para ondas

en medios deformables, el principio de superposición es válido siempre que la relación matemática entre la deformación y la fuerza restauradora (elástica) sea de tipo lineal. Si se fuera más allá del límite de elasticidad, el principio dejaría de cumplirse. En general deja de cumplirse cuando las ecuaciones que rigen el movimiento ondulatorio no son lineales.

4.7. Interferencia de ondas

Se denomina *interferencia* al encuentro de dos o más ondas en un punto. Supongamos que al punto P llegan dos ondas del tipo:

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

El movimiento resultante se obtiene aplicando el principio de superposición:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) =$$
$$= A_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - A_1 \text{sen } \omega t \text{ sen } \varphi_1 + A_2 \cos \omega t \cos \varphi_2 - A_2 \text{sen } \omega t \text{ sen } \varphi_2$$

donde hemos aplicado la igualdad trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos, $\cos \alpha + \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$. Sacando factor común $\cos \omega t$ y $\text{sen } \omega t$ queda:

$$y = \cos \omega t \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_1 - \text{sen } \omega t \underbrace{(A_1 \text{sen } \varphi_1 + A_2 \text{sen } \varphi_2)}_2$$

Expresando el paréntesis 1 como $A \cos \alpha$, y el paréntesis 2 como $A \text{sen } \alpha$, resulta:

$$y = A \cos \omega t \cos \alpha - A \text{sen } \omega t \text{ sen } \alpha = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Para determinar los parámetros A y α analizamos los cambios hechos:

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$$
$$A \text{sen } \alpha = A_1 \text{sen } \varphi_1 + A_2 \text{sen } \varphi_2$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\text{tg } \alpha = \frac{A_1 \text{sen } \varphi_1 + A_2 \text{sen } \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

que nos da α en función de valores conocidos. Por otra parte, elevando al cuadrado las ecuaciones queda:

$$A^2 \cos^2 \alpha = A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$
$$A^2 \text{sen}^2 \alpha = A_1^2 \text{sen}^2 \varphi_1 + A_2^2 \text{sen}^2 \varphi_2 + 2A_1 A_2 \text{sen } \varphi_1 \text{sen } \varphi_2$$

Al sumarlas desaparece la dependencia con α y podemos despejar A :

$$A = \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sen \varphi_1 \sen \varphi_2)}$$

Podemos simplificar el paréntesis ya que $\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sen \varphi_1 \sen \varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$:

$$A = \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Este es un resultado totalmente general y se puede aplicar al estudio de ondas en interferencia constructiva, destructiva, coherente, etc.

4.8. Ondas estacionarias y resonancia

Una *onda estacionaria* es el resultado de la interferencia de dos ondas de la misma amplitud y de la misma frecuencia que se propagan en sentidos opuestos.

Para estudiarlas consideremos la superposición de dos ondas que cumplen estas condiciones:

$$y_1 = A \sen(kx - \omega t) \quad ; \quad y_2 = A \sen(kx + \omega t)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \{ \sen(kx - \omega t) + \sen(kx + \omega t) \}$$

Teniendo en cuenta que $\sen \alpha + \sen \beta = 2 \sen \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, la onda resultante es:

$$y = 2A \sen kx \cos \omega t$$

La onda estacionaria resultante tiene unas características diferentes de las ondas originales. Si fijamos la posición, por ejemplo $x = x_0$, queda:

$$y(x_0) = \{ 2A \sen kx_0 \} \cos \omega t$$

Así que la partícula situada en esa posición ejecuta un MAS de amplitud igual al término entre corchetes; y lo mismo podríamos razonar para otras posiciones. Cuando representamos la envolvente de estas ondas obtenemos una imagen como la que se muestra en la Figura 4.9.

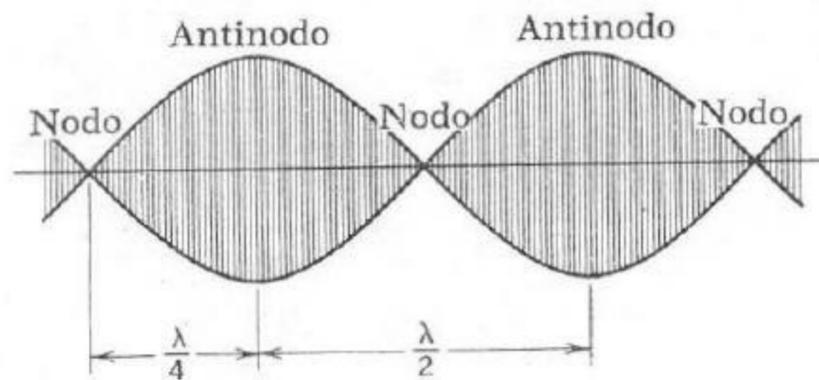


Figura 4.9. Tren de ondas estacionarias.

Observamos que la amplitud tiene un valor máximo $2A$ en aquellas posiciones en que:

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

es decir, para posiciones tales que:

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

Estas posiciones se llaman *antinodos* y están separadas $\frac{\lambda}{2}$ como vemos en la Figura 4.9. Por otra parte la amplitud tiene un mínimo de valor nulo en posiciones tales que:

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \rightarrow x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

Estos puntos se llaman *nodos* y, al igual que los antinodos, están separados $\frac{\lambda}{2}$. La separación entre un nodo y un antinodo adyacente es $\frac{\lambda}{4}$.

La energía no se propaga a derecha o izquierda de la cuerda: no puede pasar a través de los nodos ya que estos se encuentran siempre en reposo. Por tanto, la energía permanece estacionaria, alternando entre energía de vibración y energía elástica.

Por último, señalar que el perfil de envolvente representado en la Figura 4.9 correspondería al caso en la cuerda con la que se genera el tren de ondas tiene el extremo derecho fijo; la onda incidente se propaga de izquierda a derecha hasta encontrar la ligadura, a partir de ahí se forma la onda reflejada que está desfasada 180° con respecto a la incidente y al superponerse dan este patrón. Si el extremo estuviera libre, la onda reflejada estaría en fase con la onda incidente.

Resonancia

Siempre que un sistema capaz de oscilar recibe la acción de una serie periódica de impulsos de frecuencia igual o casi igual a la natural del sistema, el sistema se pone a oscilar con una amplitud relativamente grande (por ejemplo cuando impulsamos un columpio). Este fenómeno se llama *resonancia* y decimos que el sistema resuena con los impulsos aplicados.

Retomemos el ejemplo de la cuerda en la que un extremos se agita con un vibrador y el otro permanece fijo. Dependiendo de la frecuencia de vibración, la longitud de onda estacionaria puede tomar distintos valores. Sin embargo, para que se forme una evolvente como la mostrada en la Figura 4.9 es necesario

que la longitud total de la cuerda, ℓ , sea múltiplo de $\frac{\lambda}{2}$, ya que es la única manera de asegurar que en ambos extremos tendremos nodos y se establecerá una resonancia en el sistema. Exigimos pues que se verifique la condición:

$$\ell = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

O sea que se produce resonancia cuando la longitud de onda es tal que

$$\lambda = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como $\lambda = v / f$ y para la cuerda $v = \sqrt{F / \eta}$, las frecuencias naturales de oscilación vienen dadas por:

$$f = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{F}{\eta}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para otros sistemas como los péndulos, vibraciones bidimensionales, etc., también es posible establecer sus frecuencias naturales de resonancia. En general, van a depender de las dimensiones del sistema y de características del medio, como la masa por unidad de longitud η , en el caso de la cuerda.

UNIDAD 5. ELECTROMAGNETISMO

5.1. Naturaleza eléctrica de la materia

La materia está constituida por tres clases de partículas: el protón que tiene una masa de $1,672 \times 10^{-27}$ kg; el neutrón con una masa de $1,675 \times 10^{-27}$ kg; y el electrón con una masa de $9,108 \times 10^{-31}$ kg, que es 1840 veces menor que la de las otras partículas. Como veremos más adelante, el protón y el electrón poseen, además, carga eléctrica de signo distinto y ello da lugar a fuerzas de interacción eléctrica. Estas fuerzas son las que ligan los electrones al núcleo en cada átomo, a los átomos entre sí para formar moléculas y a las moléculas entre sí para formar sólidos y líquidos.

Por tanto, la mayoría de las fuerzas que actúan en nuestra experiencia cotidiana son de tipo eléctrico. Cuando tiramos de un cable, las fuerzas eléctricas de atracción interatómicas son las que impiden que el cable se rompa. El funcionamiento de muchos mecanismos en seres vivos está gobernado por interacciones de tipo eléctrico, como por ejemplo la transmisión del impulso nervioso.

5.2. Carga eléctrica y principio de conservación

Las primeras experiencias en electricidad se remontan a 600 a.C. cuando Tales de Mileto describió que un pedazo de ámbar frotado atrae trocitos de paja. Es decir, cuando algunas sustancias se frotran adquieren un estado especial que podemos describir introduciendo el concepto de carga eléctrica. Se puede constatar que hay *dos tipos de carga eléctrica*. Por ejemplo, si se frota una varilla de vidrio con seda y se suspende de un hilo, como se ilustra en la Figura 5.1, y repetimos la experiencia con otra varilla igual, al acercarlas se observa que la varilla suspendida gira alejándose de la otra; por el contrario, si acercamos una varilla

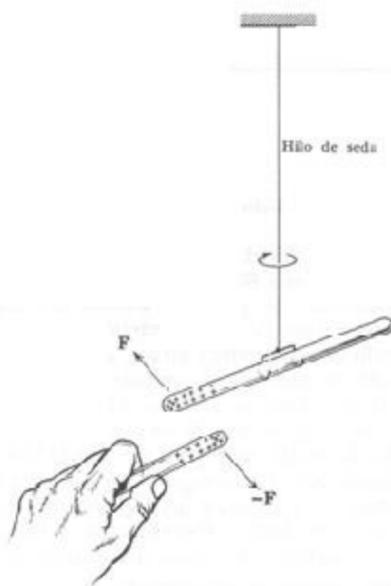


Figura 5.1 Cuando se cargan dos cuerpos con cargas del mismo signo, aparecen fuerzas repulsivas.

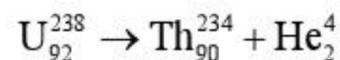
de ebonita frotada con piel, la varilla suspendida es atraída y gira acercándose a la de ebonita. Concluimos que: a) hay dos tipos de cargas; b) cargas del mismo signo se repelen y cargas de distinto signo se atraen. Se ha convenido en llamar positivas a las cargas que adquiere el vidrio al frotarlo y negativas a las que adquiere la ebonita. Hoy día sabemos que lo que ocurre es que los átomos de la superficie del vidrio pierden fácilmente electrones al ser frotada y se queda cargada positivamente. En la ebonita ocurre lo contrario, al frotarla adquiere electrones y ese exceso es lo que hace que tenga carga negativa en la superficie.

En el S.I. la unidad de carga es el culombio, $1\text{ C} = 1\text{ A}\cdot\text{s}$.

Se ha demostrado mediante numerosos experimentos que la carga eléctrica está cuantizada, es decir sólo se encuentra en cantidades que son múltiplos de la carga fundamental que vale $e = 1,602 \times 10^{-19}\text{ C}$. Un protón aislado contiene una carga $+e$; un electrón contiene esa misma carga pero con valor negativo, $-e$; cualquier otra carga q puede obtenerse como ne siendo n un entero positivo o negativo.

Otro aspecto importante es que la carga total en un proceso permanece constante. Cuando frotamos el vidrio con seda y lo cargamos positivamente, se puede comprobar que en la seda aparece una cantidad igual de cargas negativas. Es decir, no se crean cargas sino que se transportan de un material a otro, alterando ligeramente la neutralidad eléctrica de ambos.

También se conserva la carga en el proceso de desintegración radiactiva del uranio en torio:



El núcleo del uranio contiene 92 protones ($Z = 92$). Al desintegrarse espontáneamente, el núcleo emite una partícula α (He^4 , $Z = 2$) y transmuta pasando a ser un núcleo de torio ($Z = 90$). Por tanto, la cantidad de carga antes del proceso, $+92e$, es la misma que existe después.

Otro ejemplo interesante es el de aniquilación de un electrón ($-e$) y de un positrón ($+e$) cuando colisionan. Las dos partículas desaparecen convirtiendo toda su masa en energía, de acuerdo con la ecuación de Einstein, $E = mc^2$; la energía aparece en forma de dos rayos gamma. En este caso, la masa no se conserva pero sí la carga total que es nula antes y después de la colisión.

No se ha encontrado ningún experimento que contradiga este hecho por lo cual se acepta como un principio universal. El *principio de conservación de la carga* establece que no hay destrucción ni creación neta de carga eléctrica, y afirma que en todo proceso electromagnético la carga total de un sistema aislado se conserva.

Conductores y aislantes

En la naturaleza existen dos grandes grupos de materiales. Los llamados *conductores* se caracterizan por permitir que las cargas eléctricas se muevan libremente a través de ellos. Por el contrario, en los materiales *aislantes* las cargas no pueden hacerlo. Como ejemplo de buenos conductores tenemos los metales y sus aleaciones. El vidrio, la ebonita, la madera y los plásticos son ejemplos de aislantes (o dieléctricos).

5.3 Electrostatica

Es la parte del Electromagnetismo que estudia los fenómenos en los que intervienen distribuciones de cargas y campos que no dependen del tiempo. La electrostatica se ha desarrollado históricamente como una ciencia de fenómenos macroscópicos; idealizaciones tales como ‘carga puntual’ o ‘campo eléctrico en un punto’ deben asumirse como abstracciones matemáticas que permiten su descripción a nivel macroscópico, pero pueden carecer de sentido a escala microscópica.

5.3.1 Ley de Coulomb

Toda la electrostatica surge del enunciado cuantitativo de la ley de Coulomb, relativo a la fuerza que actúa entre cuerpos cargados. Coulomb realizó una serie de experimentos con diversas esferillas cargadas. Utilizó una balanza de torsión de gran sensibilidad para poder cuantificar las fuerzas que hemos presentado de manera esquemática en la Figura 5.1. Comprobó que la fuerza entre dos cuerpos cargados y a una distancia grande comparada con sus dimensiones:

- 1) Varía en proporción directa con la magnitud de cada una de las cargas.
- 2) Varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia entre ambas.
- 3) Está dirigida a lo largo de la línea que une las cargas.
- 4) Es atractiva si los cuerpos tienen cargas opuestas, y repulsiva si tienen el mismo tipo de carga.

Si tenemos las cargas q_1 y q_2 a una distancia r , la fuerza que ejerce la segunda sobre la primera se expresa en la forma:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades; en el SI y cargas situadas en el vacío, $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$; \vec{u}_{12} es un vector de módulo unidad en la línea que

une las cargas. La fuerza es negativa cuando las cargas son de signo distinto (atracción) y positiva si son del mismo signo (repulsión). Si existieran n cargas, la fuerza total sobre q_1 será:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n}$$

de manera que la fuerza resultante sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas creadas por las restantes sobre dicha carga.

5.3.2 Campo eléctrico

El espacio que rodea a un cuerpo cargado parece estar afectado y le llamamos campo eléctrico. Es análogo al espacio que rodea a un imán y que llamamos campo magnético.

El campo eléctrico juega el papel de intermediario en las fuerzas que actúan entre las cargas. Para definirlo operacionalmente, colocamos un pequeño cuerpo cargado con una carga positiva q_0 en el punto donde queremos conocer su valor y medimos la fuerza \vec{F} que actúa sobre q_0 . La intensidad de campo eléctrico se define como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Lo mismo que \vec{F} , el campo \vec{E} es un magnitud vectorial y tiene el mismo sentido que ésta. Para que la definición sea más precisa, se debe utilizar una carga de prueba lo más pequeña posible para que el campo que produce q_0 no afecte a la medida. Por tanto debemos escribir:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

por lo que la unidad de campo eléctrico en el S.I. es N/C (que equivale a V/m).

El caso más sencillo posible es el campo creado por una *carga puntual* q . De la ley de Coulomb haciendo los cambios $q_1 \rightarrow q_0$, $q_2 \rightarrow q$, obtenemos que el campo a una distancia r de la carga q es:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

siendo \vec{u}_r un vector unitario en la dirección radial que une q con el punto donde calculamos el campo; el sentido es alejándose de q si $q > 0$ o apuntando hacia q si $q < 0$.

Vamos a presentar ahora un concepto que nos ayudará a visualizar fácilmente cómo se distribuye el campo eléctrico alrededor de las cargas.

Líneas de campo

Fueron introducidas por Faraday, quien siempre pensó en estos términos para caracterizar tanto la perturbación eléctrica como la magnética que se crea cerca de imanes. La relación entre líneas de campo y el vector intensidad de campo es la siguiente:

- 1) La tangente a una línea de campo en un punto da la dirección de \vec{E} en ese punto
- 2) Las líneas de campo se dibujan de modo que el número de líneas por unidad de área de sección transversal sea proporcional al módulo de \vec{E} . Donde el campo sea más intenso las líneas se verán más próximas que en aquellas regiones donde el campo sea más débil.

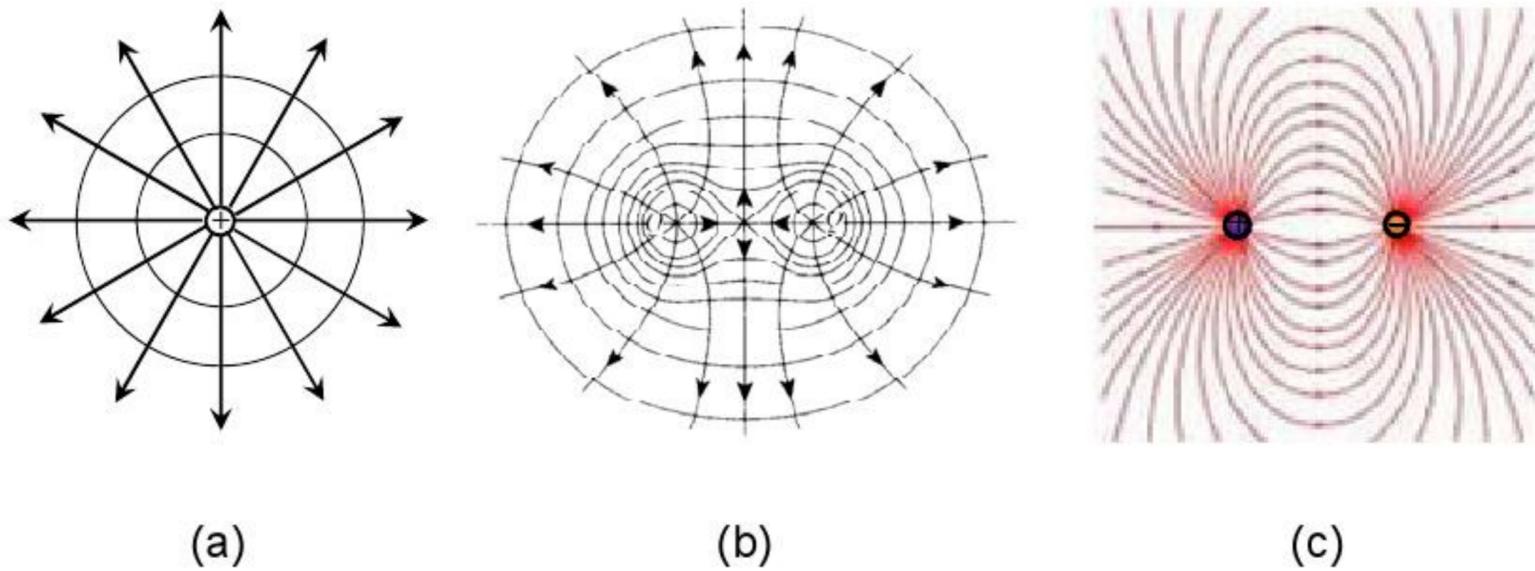


Figura 5.2. Líneas de campo eléctrico producidas por: (a) una carga positiva; (b) dos cargas positivas; (c) una carga positiva y otra negativa. Por convención, estas líneas nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas (o van hacia el infinito). En (a) y (b) también se ha dibujado un conjunto de líneas perpendiculares, que pertenecen a superficies equipotenciales cuya definición se verá más adelante.

Ejemplo

En la Figura 5.3 se muestran dos cargas, $q_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ C}$ y $q_2 = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$ separadas por una distancia $\ell = 10 \text{ cm}$. Hallar el campo a lo largo de la línea que los une y determinar el punto en el cual su valor es nulo.

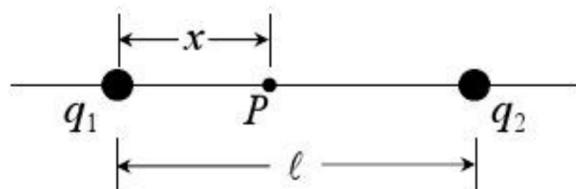


Figura 5.3. Geometría para calcular el campo creado por dos cargas positivas.

Si llamamos x a la distancia de q_1 al punto donde medimos el campo, la carga q_2 se encontrará a una distancia $\ell - x$. A lo largo de la línea que une las cargas, el campo creado por q_1 va en sentido contrario al creado por q_2 , ya que una carga positiva de prueba colocada en el punto P será repelida por ambas. El campo total es la suma de las dos contribuciones:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(\ell - x)^2} \right) \vec{u}_{12}$$

siendo \vec{u}_{12} un vector unitario dirigido de q_1 a q_2 . Para medir un valor nulo se ha de cumplir:

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(\ell - x)^2} \rightarrow x = \frac{\ell}{1 + \sqrt{q_2/q_1}}$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene $x = 4,1$ cm.

5.3.3 Campos creados por distribuciones continuas de carga:

En muchos problemas prácticos, las cargas no se presentan aisladas sino que están distribuidas de forma continua ocupando una región del espacio. Debido a que los campos se pueden superponer, la solución consiste en descomponer la carga total en cargas elementales, dq , que cumplirán la ley de Coulomb, y obtener el campo total como suma de todas esas contribuciones elementales.

Distribuciones lineales: las cargas se distribuyen a lo largo de líneas, como por ejemplo una recta, una circunferencia, etc. Supongamos que la línea está cargada con una densidad lineal de carga λ (C/m) distribuida a lo largo de una curva C como se muestra en la Figura 5.4. La línea se descompone en elementos de longitud $d\ell$ y se le asocia a cada elemento una carga elemental $dq = \lambda d\ell$; tomamos como origen el punto O , trazamos el vector de posición \vec{r} para el punto P donde queremos calcular el campo, y \vec{r}' para la posición de dq , se tiene para el campo total $\vec{E}(P)$:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda d\ell}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

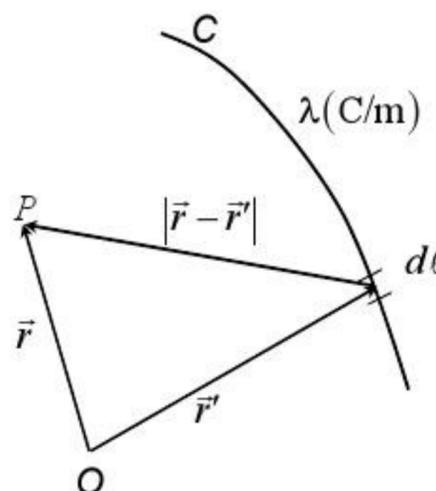
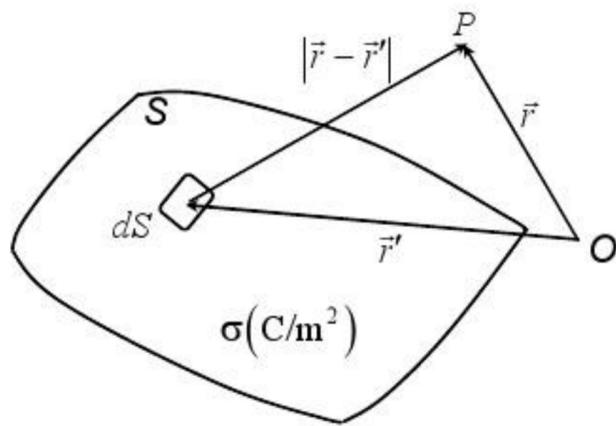


Figura 5.4. Distribución de carga lineal.

siendo $\vec{u}_{12} \equiv \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ un vector unitario en la dirección que une la carga elemental y P .

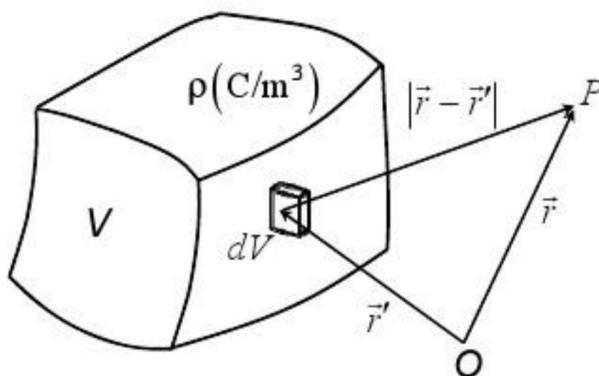
Distribuciones superficiales: las cargas se distribuyen sobre una superficie S , Figura 5.5. En este caso hacemos una división de la superficie total en elementos dS ; asumiendo que hay una densidad de carga σ (C/m^2), el elemento de carga será $dq = \sigma dS$. El campo total lo obtenemos como superposición de todas las contribuciones elementales:



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Figura 5.5. Distribución de carga superficial.

Distribuciones volumétricas: las cargas se distribuyen sobre un volumen dado con densidad de carga ρ (C/m^3), Figura 5.6. Como antes, dividimos la región en elementos de volumen dV y obtenemos la carga elemental haciendo $dq = \rho dV$; el campo total será:



$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Figura 5.6. Distribución de carga volumétrica.

En general, salvo que las distribuciones sean muy sencillas, es difícil calcular el campo mediante estas fórmulas. En la siguiente sección veremos que el campo se puede obtener de una manera mucho más

sencilla cuando las distribuciones presentan simetrías como por ejemplo simetría de tipo planar, esférica o cilíndrica.

5.3.4 Flujo del campo eléctrico: Ley de Gauss

El flujo, Φ , es una magnitud escalar que indica el número de líneas de campo que atraviesan una superficie imaginaria, que puede ser abierta o cerrada, situada en dicho campo. Para el caso del campo eléctrico lo llamaremos Φ_E .

La Figura 5.7 muestra dos cargas de igual magnitud y signo opuesto. Las curvas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 representan los cortes con el plano de la figura de cuatro superficies cerradas.

Se ha convenido que Φ_E es positivo si las líneas de fuerza salen de la superficie y negativo si entran. Entonces, se tiene $\Phi_E > 0$ para S_1 y $\Phi_E < 0$ para S_2 . En S_3 y S_4 hay tantas líneas de campo que entran como líneas que salen: el flujo neto a través de ellas es nulo.

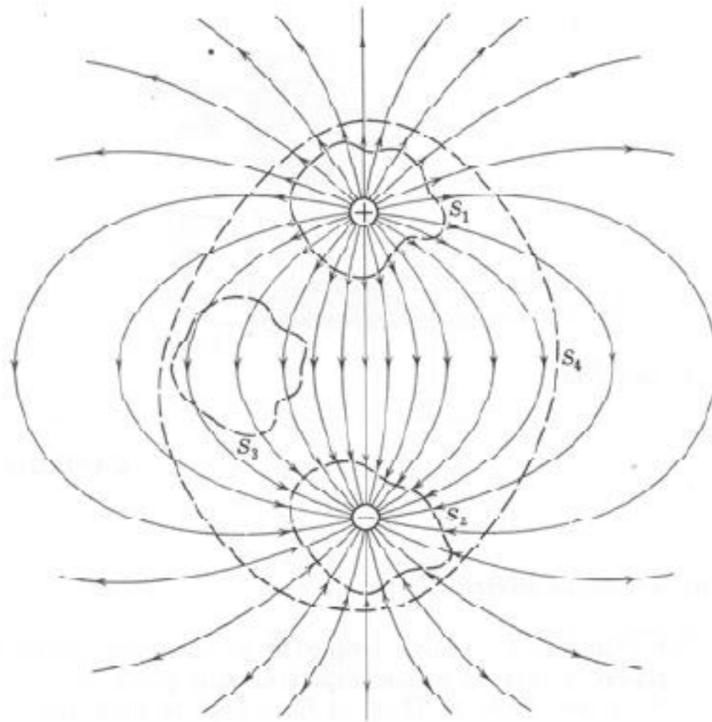


Figura 5.7. Flujo a través de distintas superficies situadas en el campo de dos cargas de signo opuesto.

Para definir el flujo matemáticamente a través de una superficie cualquiera S , la dividimos en pequeños elementos de superficie caracterizados por su área, dS , y el vector unitario normal trazado hacia fuera de dicho elemento: $d\vec{S} = dS \vec{u}_n$. El flujo elemental viene dado por:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

que nos indica que el flujo es máximo y positivo si \vec{E} y $d\vec{S}$ son paralelos ya que $\cos 0^\circ = 1$; , tendrá un valor máximo pero negativo si los vectores son anti-paralelos, $\cos 180^\circ = -1$; y será nulo si $\vec{E} \perp d\vec{S}$, ya

que $\cos 90^\circ = 0$. Para hallar el flujo total hay que sumar las contribuciones de todos los elementos de superficie:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Gauss

Se aplica a cualquier superficie cerrada y establece una relación entre el flujo del campo eléctrico que la atraviesa y la carga neta, q , encerrada por dicha superficie:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q$$

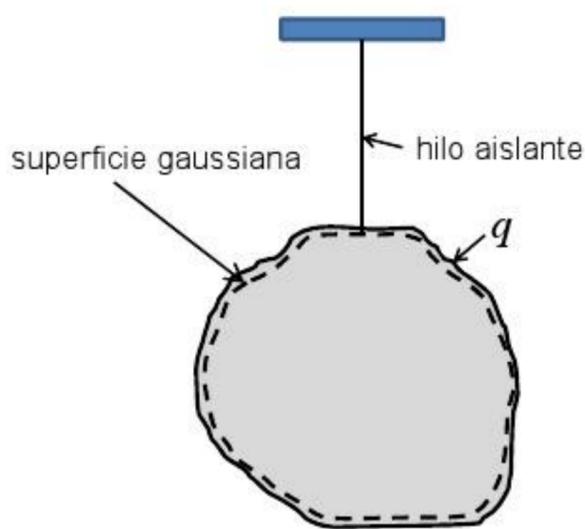
O bien, usando su valor en función del campo:

$$\epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \quad (*)$$

Donde el círculo sobre la integral indica que la superficie de integración es cerrada. Vamos a ver dos ejemplos en los que es útil su aplicación.

Distribución de la carga en exceso en un conductor en equilibrio electrostático

Figura 5.8. Conductor en equilibrio y cargado



Podemos predecir un hecho importante ayudándonos de la Ley de Gauss: *Una carga en exceso colocada en un punto cualquiera de un conductor en equilibrio se distribuye totalmente en su superficie exterior.* Experimentalmente se demostró que esta hipótesis era correcta incluso antes de que se enunciara la ley de Gauss. En la Figura 5.8 se muestra la sección transversal de un conductor aislado. Las líneas a trazos muestran una superficie gaussiana muy cerca de la

superficie del conductor. Si comunicamos un exceso de carga q en un punto arbitrario del volumen, se producen campos eléctricos que actúan redistribuyendo las cargas hasta que éstos se anulan completamente; en ese momento las cargas quedan en reposo y se establece una situación de equilibrio estático. Si \vec{E} es nulo en todo el volumen, lo será también en todos los puntos de la superficie gaussiana; esto implica que el flujo a través de la misma ha de ser cero por tanto la carga encerrada también es nula. Concluimos que el exceso de carga se ha situado en la superficie del conductor.

Distribución uniforme de carga positiva sobre una capa esférica de radio R

En este caso se tiene *simetría esférica*. Lógicamente tomaremos el origen O en el centro de la esfera; todos los puntos situados a una distancia r tendrán el mismo valor del campo en módulo, E , y la dirección será a largo de la línea que une el origen con el punto P donde calculamos el campo, Figura 5.9. Hay que distinguir dos casos: (a) $r < R$ y (b) $r \geq R$.

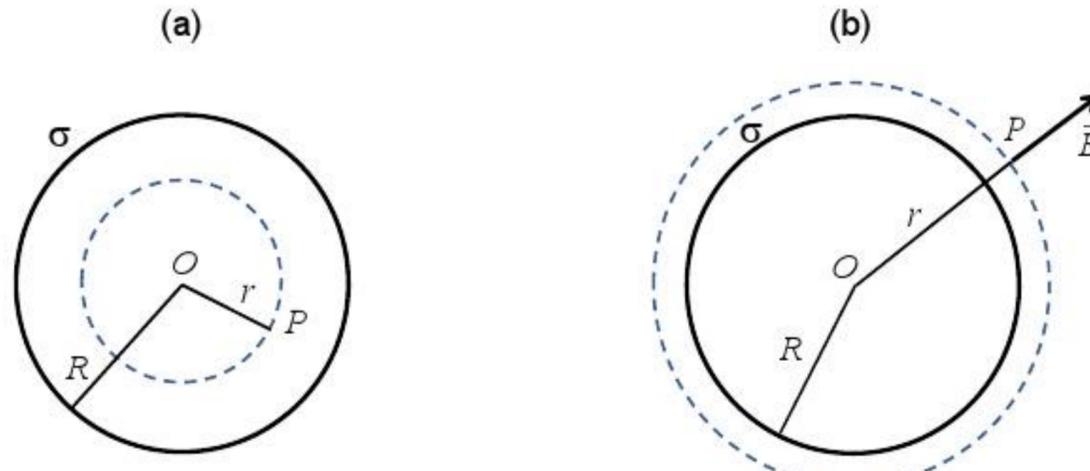


Figura 5.9. Cálculo del campo eléctrico creado por una distribución de carga esférica. (a) $r < R$; (b) $r \geq R$

En el primer caso, trazamos una esfera gaussiana de radio r que pase por P y que en el plano de la figura se ve como una circunferencia a trazos. Si aplicamos (*) obtenemos que el resultado de la integral es cero puesto que dentro de dicha esfera no se encierra ninguna carga. Por tanto,

$$\int_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{esfera}} E dS = 0 \Rightarrow E = 0$$

Para analizar el caso (b) trazamos una esfera gaussiana de radio r que pase por P y que en el plano de la figura se ve como una circunferencia a trazos: el vector $d\vec{S}$ de la ecuación (*) es tal que su módulo es el área de dicho elemento y su dirección la de un vector unitario normal a la superficie, siendo en este caso un vector unitario en la dirección radial, es decir, $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$. Por tanto al ser un vector paralelo a $\vec{E} = E \vec{u}_r$, el producto escalar de ambos es el producto de sus módulos, $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS$. Por otro lado, la carga encerrada es $q = \sigma 4\pi R^2$, ya que está distribuida uniformemente sobre la esfera. Se tiene entonces:

$$\int_{\text{esfera}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{esfera}} E dS = \sigma 4\pi R^2$$

Como el módulo del campo es constante para todos los puntos sobre la esfera gaussiana, puede salir fuera de la integral; además $\int_{\text{esfera}} dS = 4\pi r^2$. Por tanto queda:

$$\epsilon_0 \int_{\text{esfera}} E dS = \epsilon_0 E 4\pi r^2 = \sigma 4\pi R^2 \Rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}; \quad \vec{E} = E \vec{u}_r$$

Podemos expresar también el campo en función de la carga total q ,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}; \quad \vec{E} = E \vec{u}_r$$

Esta ecuación permite interpretar que para $r \geq R$ la esfera se comporta como si toda la carga estuviera concentrada en el origen, ya que coincide con la expresión para una carga puntual.

5.3.5 Energía potencial. Potencial electrostático

Supongamos varias cargas fijas próximas unas a otras. Estas cargas se atraerán o repelerán en función de su signo y si se dejan libres, se pondrán en movimiento adquiriendo energía cinética. Ello significa que tienen capacidad de realizar un trabajo y por tanto poseen *energía potencial*. Esta energía potencial eléctrica se convierte en cinética cuando las cargas se ponen en movimiento.

Así, cuando existe un campo en una región y situamos en un punto P una carga q , se le puede asignar una energía potencial equivalente al trabajo necesario para trasladarla desde el infinito (donde su energía es nula) hasta el punto P.

Ejemplo: Supongamos que el campo es el creado por una *carga puntual* $Q > 0$ situada en el origen de coordenadas. Se tendrá un campo radial como el representado en la Figura 5.2(a). Si traemos otra carga q desde el infinito hasta el punto A la energía potencial será:

$$E_p = W = \int_{\infty}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^A \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{l}$$

siendo $d\vec{l}$ el desplazamiento elemental de la carga q a lo largo de una línea radial y acercándose hacia el centro: $d\vec{l} = dl \vec{u}_r = -dr \vec{u}_r$. Por tanto $\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = -dr$ y la integral será:

$$E_p = - \int_{\infty}^A \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^A \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A}$$

donde r_A es la distancia del punto A al origen. Se puede razonar de forma análoga para el caso $Q < 0$, y cualquier otra distribución de cargas.

En el SI la energía se mide en julios (J). También podemos hallar variaciones de la energía potencial al trasladar la carga desde el punto A hasta el punto B:

$$E_{pB} - E_{pA} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Vemos que es proporcional al valor de la carga q . Si dividimos por q en la ecuación anterior y en ésta, quedarían expresiones que representan la energía potencial por unidad de carga o la variación de energía potencial por unidad de carga, respectivamente. Estas cantidades se denominan **potencial eléctrico** y **diferencia de potencial eléctrico**. Asignando el valor cero al potencial en el infinito, el potencial en un punto viene dado por el trabajo necesario, W , para traer la unidad de carga desde el infinito hasta ese punto:

$$V = \frac{W}{q}$$

Su unidad en el SI es el voltio: 1 voltio (V) = 1 julio / 1 culombio (J/C). En general, tiene más aplicación el concepto de diferencia de potencial eléctrico que nos da el trabajo que se requiere para mover una carga unidad entre dos puntos:

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q}$$

Tanto W_{AB} como $V_B - V_A$ son independientes de la trayectoria seguida para ir de A a B. Podemos demostrar que esto es así en el caso de que las trayectorias se encuentren en el campo creado por una carga puntual, $Q > 0$, como se ilustra en la Figura 5.10. El campo lleva dirección radial y por tanto el trabajo elemental que debe realizarse sobre la carga unidad a

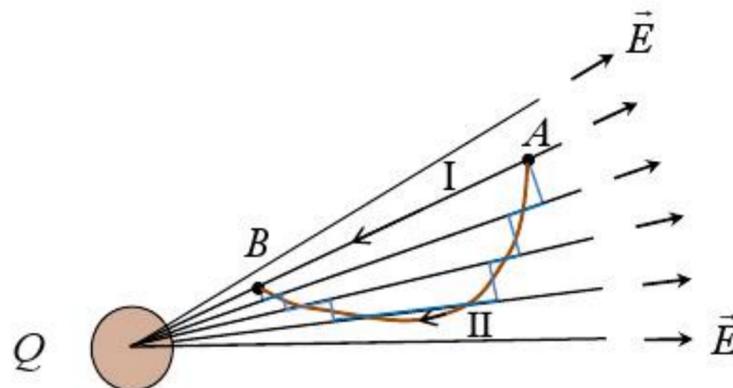


Figura 5.10. Trayectorias I y II que llevan del punto A al B dentro del campo creado por la carga Q.

lo largo de I es el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl = Edr$ ya que \vec{E} y $d\vec{l}$ son anti-paralelos y la línea radial va hacia r cada vez menor, $dl = -dr$. Sumando todos los trabajos elementales obtendremos $V_B - V_A$. La trayectoria II se puede descomponer en tramos radiales y perpendiculares a dichas líneas, como se muestra en la Figura 5.10 exagerando la distancia entre línea y línea para facilitar su visualización. Si los tramos se acortan, nos acercaremos más y más a II. Los tramos radiales dan la misma contribución que en I, $E dr$, ya que el módulo de \vec{E} sólo depende de la distancia al centro, y en los transversales se tiene $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ al tratarse de vectores perpendiculares. Luego hemos demostrado que el trabajo es independiente del camino seguido y, por tanto, el *campo eléctrico tiene carácter conservativo*. Aunque se ha demostrado para el caso particular de una carga puntual, esta propiedad se verifica para cualquier distribución de carga.

Vamos a determinar la expresión de $V_B - V_A$ para el ejemplo de la Figura 5.10. El campo eléctrico ejerce una fuerza $q\vec{E}$ sobre la carga q colocada en él; para evitar que la carga se acelere, el agente externo debe aplicar una fuerza $-q\vec{E}$ a medida que la carga se mueve desde A hasta B . Luego el trabajo total realizado sobre la carga unidad será:

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como ya hemos visto, a lo largo de una línea radial se cumple en este caso $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr$,

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_A^B E dr = - \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Como $r_B < r_A$ se tendrá $V_B - V_A > 0$, la carga se ha movido hacia potenciales crecientes. Si el punto A lo llevamos al infinito, y B es un punto genérico situado a una distancia r de Q , la ecuación anterior se reduce a:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

que nos da la distribución de potencial debido a la carga Q en cualquier punto del espacio con $V = 0$ en el infinito.

El lugar geométrico de los puntos que tienen el mismo valor de potencial eléctrico se denomina *superficie equipotencial*. En ella se cumple:

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q} = 0 \rightarrow W_{AB} = 0$$

Es decir, no se realiza trabajo cuando se mueve una carga sobre una superficie equipotencial. También tiene la propiedad de que las líneas de campo eléctrico son perpendiculares en todo punto de la superficie equipotencial (véase figura 5.2).

Por simetría, las superficies equipotenciales de una carga puntual es una familia de esferas concéntricas, y el campo va en la dirección radial en todo punto de dichas esferas.

El potencial eléctrico es una magnitud escalar (a diferencia del campo que es un vector). Por tanto, cuando se tienen varias cargas, el potencial total es la suma escalar del potencial creado por cada una de ellas. Si tenemos n cargas a una distancia r_n del punto donde calculamos el potencial, se cumple:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \dots + \frac{q_n}{r_n} \right]$$

Ejemplo 1

Se tiene las cargas $q_1 = +10 \text{ pC}$, $q_2 = -20 \text{ pC}$, $q_3 = +30 \text{ pC}$ y $q_4 = +2 \text{ pC}$ colocadas en los vértices de un cuadrado de lado $a = 1 \text{ m}$. ¿Cuánto vale el potencial en el centro del cuadrado?

Solución: En este caso, la distancia de cada carga al centro es la mitad de la diagonal del cuadrado, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a\sqrt{2}/2 = 0,7071 \text{ m}$. La ecuación anterior nos da ($1 \text{ pC} = 10^{-9} \text{ C}$):

$$V = 9 \times 10^9 \frac{(10 - 20 + 30 + 2) \times 10^{-9}}{0,7071} = 509 \text{ (V)}$$

Para distribuciones continuas esta suma se sustituye por una integral, de forma análoga a como hicimos para calcular el campo eléctrico. Pero el proceso matemático es más sencillo porque solo tenemos que hallar un valor, mientras que para el campo hay que determinar las tres componentes del vector.

Ejemplo 2

Potencial eléctrico creado por una esfera metálica de radio R cargada con Q .

Ya hemos visto que, al ser metálica, la carga Q se va a distribuir uniformemente sobre la superficie de la esfera. Para $r \geq R$ el problema es análogo al de una carga puntual de valor Q situada en el centro de la esfera. Por tanto, podemos poner:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq R$$

Sobre la superficie, $r = R$, se tendrá:

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

En el interior de la esfera el campo es nulo; el potencial es constante e igual a $V(R)$.

5.3.6 Capacidad. Capacitores (o condensadores). Dieléctricos

Acabamos de ver que el potencial de una esfera cargada es directamente proporcional al valor de Q . Si hallamos el cociente Q/V resulta:

$$\frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Se trata de una magnitud que solo depende de la geometría de la esfera, su radio, y de un parámetro eléctrico, ϵ_0 , que es la permitividad eléctrica del vacío. Este comportamiento también ha demostrado ser cierto para otras geometrías. En consecuencia, la capacidad de un conductor situado en el vacío se define por la relación:

$$C_0 = \frac{Q}{V}$$

La capacidad se mide en el SI en faradios; 1 faradio (F) = 1C / 1 V.

Faraday hizo muchos experimentos con conductores cargados y observó que, cuando el conductor se rodea de un medio dieléctrico, su capacidad aumenta en una constante que es característica del material. Así, todos los dieléctricos se caracterizan por su permitividad eléctrica ϵ , que se puede expresar como:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

siendo ϵ_r la constante dieléctrica del material que da cuenta del aumento de la capacidad:

$$C = \epsilon_r C_0$$

En la Tabla 5.1 se dan los valores de las constantes dieléctricas de algunos medios.

Medio	Constante dieléctrica, ϵ_r
Aire	1.00054
Agua	78
Vidrio Pyrex	4.5
Mica	5.4

Ámbar	2.7
Neopreno	6.9
Porcelana	6.5

Tabla 5.1. Constante dieléctrica de algunos medios dieléctricos.

Hay un modelo que explica perfectamente este comportamiento de los materiales dieléctricos en presencia de campos; el lector interesado puede consultar los libros de Física pertinentes pero esto queda fuera del ámbito de nuestro estudio.

En electrónica se utilizan mucho los llamados **condensadores** o **capacitores** que son estructuras formadas por dos conductores cargados con cargas de igual valor y signos opuestos, $\pm Q$. Los más comunes son los formados por dos placas paralelas y que se denomina condensador plano-paralelo. También se utiliza el formado por dos cilindros concéntricos llamado condensador cilíndrico. La capacidad de esta configuración se define:

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-}$$

siendo V_+ el potencial del conductor cargado con $+Q$ y V_- el del cargado con $-Q$. Como en el caso de un sólo conductor, al introducir un dieléctrico entre ambos la capacidad se multiplica por el factor ϵ_r .

Capacidad de un condensador de placas plano-paralelas

La Figura 5.11(a)-(b) muestran la geometría de este tipo de condensador y las líneas de

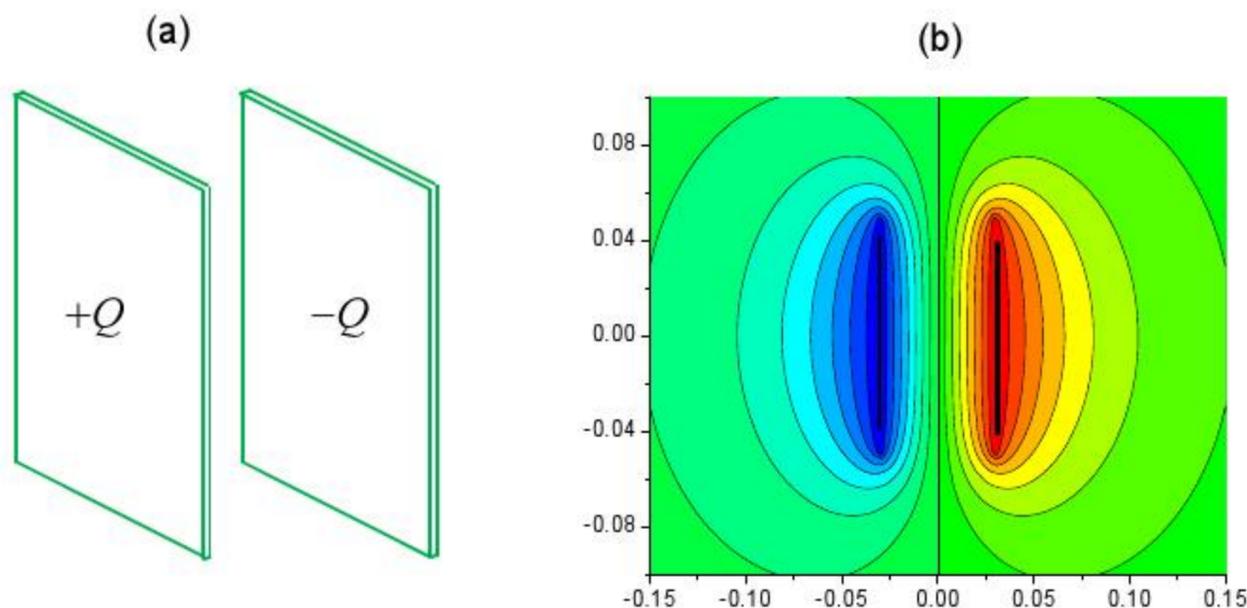


Figura 5.11. Condensador de placas paralelas: (a) geometría; (b) Distribución de las líneas de potencial.

potencial; estas líneas son prácticamente equiespaciadas en la región entre placas, si bien dejan de serlo al acercarse a los bordes. Para nuestro estudio, despreciaremos la pequeña distorsión y supondremos que *el campo es uniforme* en toda esta región; sus líneas van desde la placa cargada con $+Q$ hasta la placa con $-Q$. Para hallar su valor aplicaremos el teorema de Gauss a la superficie gaussiana dibujada con *líneas de trazos* en la Figura 5.12:

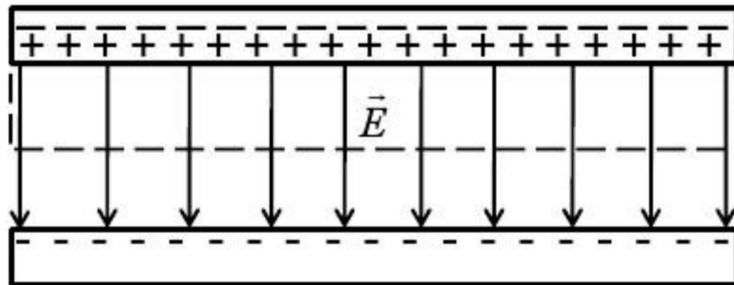


Figura 5.12. Geometría para hallar \vec{E} en el condensador y corte transversal de la superficie gaussiana (líneas de trazos) utilizada.

La superficie completa es una caja de seis caras cuya base superior queda dentro de la placa positiva y cuya base inferior queda en el espacio entre placas; en la figura se muestra un corte transversal de la misma. La carga encerrada por esta caja es $+Q$. En cuanto al flujo que atraviesa las caras: 1) la base superior está dentro del conductor donde el campo es nulo, luego el flujo es nulo a través de ella; 2) sobre las cuatro caras laterales, las líneas de \vec{E} son tangentes a las mismas, por tanto el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ es nulo porque $\vec{E} \perp d\vec{S}$; 3) la única cara en la que hay flujo del campo es la base inferior, en ella $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ y el producto escalar es igual al producto de módulos; la ventaja de elegir esta superficie es que el campo es constante en toda el área de integración y por ello sale fuera de la integral:

$$\int_{caja} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{cara\ inf} E dS = E \int_{cara\ inf} dS = ES$$

donde S es el área de la cara. Aplicando Gauss queda:

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Por tanto, el módulo del campo es igual a la densidad de carga en la placa conductora positiva dividida por la permitividad eléctrica del vacío.

El siguiente paso es hallar la diferencia de potencial que se ha establecido entre las placas.

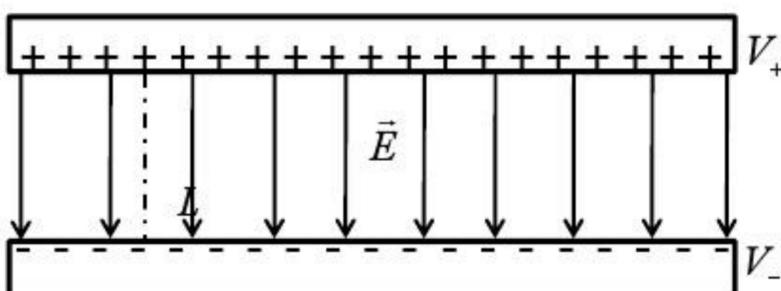


Figura 5.13. Geometría para hallar la diferencia de potencial entre las placas del condensador

Según hemos visto, para esto hay que hallar:

$$V_+ - V_- = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

siendo L una línea cualquiera que conecta la placa inferior con la superior; conviene elegir una línea como la mostrada en la figura 5.13, (línea). En ese caso \vec{E} es antiparalelo a $d\vec{l} \rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl$, por tanto:

$$V_+ - V_- = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_L Edl = E \int_L dl = E\ell$$

donde ℓ es la distancia entre las placas. Aplicando la definición de capacidad tenemos:

$$C_0 = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\sigma S}{E\ell} = \frac{\sigma S}{\sigma\ell / \epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{S}{\ell}$$

Observamos nuevamente que depende de factores geométricos y del parámetro ϵ_0 .

Cuando entre las placas se introduce un dieléctrico permitividad ϵ el valor de la capacidad aumenta en el factor ϵ_r :

$$C = \epsilon_r C_0 = \epsilon \frac{S}{\ell}$$

Al poder almacenar cargas, el condensador puede verse como un dispositivo capaz de contener energía de tipo electrostático para luego devolverla cuando sea necesaria. Ello es particularmente útil en circuitos electrónicos.

5.4 Corriente eléctrica. Densidad de corriente

En los puntos anteriores hemos tratado con cargas en reposo. En lo que sigue vamos a considerar cargas en movimiento; esto implica estudiar el comportamiento de los conductores de electricidad, o sea, aquellos *materiales en los que los portadores de carga son libres de moverse bajo la acción de campos eléctricos*.

Los conductores con los que normalmente operamos se encuadran en los siguientes tipos: 1) metales y sus aleaciones, que tienen estructura cristalina; 2) electrolitos, normalmente disueltos; 3) gases ionizados; y 4) dieléctricos imperfectos.

La *carga en movimiento constituye una corriente* y el proceso por el cual la carga se transporta se llama *conducción*. La corriente I se define como *la carga que atraviesa una superficie dada en la unidad de tiempo* (por ejemplo la carga por unidad de tiempo que atraviesa la sección transversal de un alambre):

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad de corriente es el amperio; 1 amperio (A) = 1 culombio (C) /1 segundo (s).

Naturaleza de la corriente: En un metal, la corriente es transportada exclusivamente por electrones, mientras que los iones positivos están fijos en posiciones regulares del cristal.

En un electrolito, la corriente es conducida tanto por los iones negativos como por los positivos, aunque debido a que unos tienen más movilidad que otros, suele predominar la conducción de uno de ellos. Cuando se somete una disolución de Na^+ y Cl^- a un campo eléctrico, los iones de sodio se moverán de forma constante hacia el electrodo negativo (cátodo), mientras que los iones de cloro se moverán hacia el electrodo positivo (ánodo).

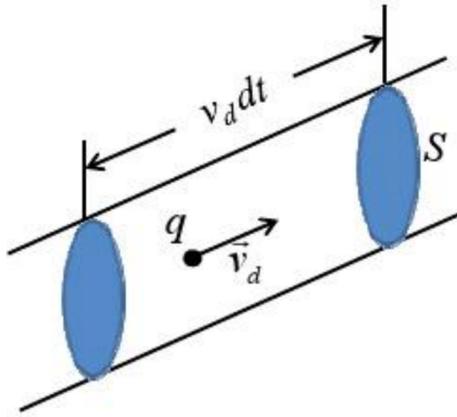
En los gases ionizados, como los plasmas, los electrones responden más rápidamente a un campo eléctrico que los iones positivos, de mucha mayor masa, por lo que dan cuenta de la mayor parte de la corriente.

Criterio de signos para definir el sentido de las corrientes: Al definir la corriente hay que tener en cuenta no sólo la velocidad de las cargas sino también su signo. Así, *cargas positivas y negativas que viajan en sentidos opuestos contribuyen a producir corriente en el mismo sentido*. Por convenio, *el sentido en que se mueven las cargas positivas se toma como sentido de la corriente*; ello es debido a que una corriente se origina como respuesta a un campo eléctrico y las cargas positivas se moverán en el sentido del campo. Esto hay que tenerlo en cuenta cuando estudiemos circuitos; normalmente los que producen la corriente son los electrones circulando por los cables, pero dibujaremos la corriente saliendo del polo positivo de las baterías y circulando hacia el polo negativo. Ello no es obstáculo para que la resolución del problema sea correcta, pero hemos de hacer esa abstracción.

Conducción en metales: El movimiento de los electrones libres (los más alejados del núcleo) en un metal es semejante al de las moléculas en un gas. Así, en el aire en calma las moléculas se mueven con velocidades instantáneas grandes entre choques, pero la velocidad media sumada vectorialmente es nula. Cuando hay brisa, las moléculas tienen una pequeña velocidad de desplazamiento en el sentido de la brisa, que se superpone a las velocidades instantáneas. De igual modo, cuando no hay paso de corriente en un metal “el gas de electrones” se mueve en direcciones aleatorias con grandes velocidades

a causa de la energía interna, pero su velocidad media es cero; cuando se aplica el campo, los electrones adquieren una pequeña *velocidad de desplazamiento*, v_d en la dirección del campo pero en sentido opuesto. Consideremos una corriente en un alambre de sección transversal S .

Figura 5.14.



Sea N el número de partículas libres, con carga q , por unidad de volumen; supondremos que se mueven con una velocidad de desplazamiento \vec{v}_d paralela a las paredes del tubo, como se muestra en la Figura 5.14. En el intervalo dt , todas las cargas contenidas en el volumen $Sv_d dt$ pasarán a través de S . El número de partículas contenidas en dicho volumen es $NSv_d dt$, y la carga es:

$$dQ = qNSv_d dt$$

La corriente asociada es por tanto:

$$I = \frac{dQ}{dt} = qNSv_d$$

Ejemplo

¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de los electrones de un alambre de Cu, de radio 0,8 mm, que transporta una corriente de 1A? Datos: densidad másica = 8,93 g/cm³; $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ átomos/mol; masa molar $M = 63,5$ g/mol.

Solución: en el Cu hay un electrón libre por átomo, luego N coincide con la densidad atómica:

$$N = \frac{\text{densidad} \cdot N_A}{M} = \frac{8,93 \cdot 6,02 \times 10^{23}}{63,5} = 8,47 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3.$$

Por otra parte, la sección transversal vale:

$$S = \pi r^2 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

y, finalmente, la velocidad de desplazamiento es:

$$v_d = \frac{I}{NqS} = \frac{1}{8,47 \times 10^{28} \cdot 1,6 \times 10^{-19} \cdot 2 \times 10^{-6}} = 3,68 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

Vemos que es un valor relativamente pequeño. Lo que hace que en la práctica observemos corrientes no despreciables es el gran número de electrones, N , que participan en el proceso de conducción, no su velocidad de desplazamiento.

Densidad de corriente

Vamos a considerar el conductor desde un punto de vista microscópico y el caso más general en que *la velocidad* de las cargas *no sea perpendicular* a la superficie sobre la que estamos observando el paso de corriente. Razonando igual que antes llegamos a que la carga neta dQ que atraviesa un elemento de área dS , representado por el vector $d\vec{S} = \vec{n} dS$ en la Figura 5.15, es:

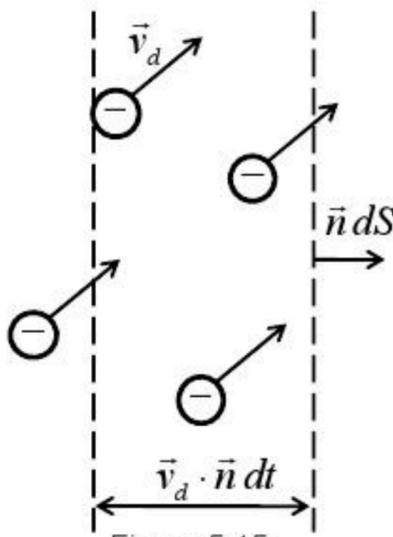
$$dQ = qNdt \vec{v}_d \cdot \vec{n} dS,$$

y la corriente elemental:

$$dI = \frac{dQ}{dt} = qN\vec{v}_d \cdot \vec{n} dS$$

La cantidad $qN\vec{v}_d$ es un vector que tiene dimensiones de corriente por unidad de área. Se denomina densidad de corriente y se representa por \vec{J} :

$$\vec{J} = qN\vec{v}_d$$



La densidad de corriente se mide en A/m^2 y es la unidad del SI, como vimos en el primer tema. Sustituyendo en la ecuación anterior podemos escribir:

$$dI = \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

La corriente total se obtiene integrando a toda la superficie que es atravesada por las cargas:

$$I = \int_s dI = \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

5.5 Ley de Ohm: conductividad, resistividad y resistencia

Experimentalmente se comprueba que en un metal a temperatura constante, la densidad de corriente es linealmente proporcional al campo eléctrico aplicado:

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

La constante de proporcionalidad σ_c se denomina *conductividad* y la ecuación que la relaciona con \vec{J} y \vec{E} es la *ley de Ohm*. La conductividad se mide en siemens/metro (S/m); de la fórmula anterior deducimos que $1 \text{ S/m} = 1 \text{ A}/(\text{V}\cdot\text{m})$. La ley de Ohm constituye una buena descripción para la mayoría de los metales, que se llaman medios óhmicos.

El recíproco de la conductividad se conoce como *resistividad*, $\rho_c = 1/\sigma_c$. Ambas cantidades son muy importantes para caracterizar el comportamiento eléctrico de los metales, y en general de todos los materiales, sean o no buenos conductores de la electricidad.

También se ha encontrado experimentalmente que σ_c y ρ_c dependen de la temperatura. Para la resistividad, esta dependencia se expresa en la forma:

$$\rho_c = \rho_{c20} [1 + \alpha(t - 20^\circ C)]$$

Es decir, los valores a cualquier temperatura se obtienen a partir del valor medido a $20^\circ C$ y del coeficiente α o *coeficiente de temperatura* de la resistividad. En la Tabla 5.2 se listan los valores de ρ_c y α para diversos materiales.

Material	Resistividad (V·m/A)	Coef. de temperatura (K ⁻¹)
Plata	$1,6 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Cobre	$1,7 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2,8 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Wolframio	$5,5 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-3}$
Hierro	$1,0 \times 10^{-7}$	$5,0 \times 10^{-3}$
Plomo	$2,2 \times 10^{-7}$	$4,3 \times 10^{-3}$
Mercurio	$9,6 \times 10^{-7}$	$9,0 \times 10^{-4}$
Nicron	$1,0 \times 10^{-6}$	$4,0 \times 10^{-4}$
Carbono	$3,5 \times 10^{-5}$	$-5,0 \times 10^{-4}$
Germanio	0,45	$-4,8 \times 10^{-2}$
Silicio	640	$-7,5 \times 10^{-2}$
Madera	$10^8 - 10^{14}$	—

Tabla 5.2 Resistividad (a $20^\circ C$) y coeficiente de temperatura de diversos materiales.

Observamos que en la tabla figuran tres materiales (carbono, germanio y silicio) cuyo coeficiente de temperatura es negativo, ello significa que su resistividad disminuye con la temperatura en lugar de aumentar. Pertenecen al grupo de materiales llamados *semiconductores*, que tienen importantes aplicaciones en electrónica.

5.5.1 Resistencia de un conductor

Consideremos una muestra óhmica conductora, en forma de alambre recto de sección uniforme, cuyos extremos se mantienen a una diferencia de potencial (ddp) constante, $\Delta V = V_1 - V_2$, como se muestra en la Figura 5.16. Existirá un campo eléctrico dado por:

$$\Delta V = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Hemos supuesto que $V_2 < V_1$ ya que la corriente va siempre hacia potenciales decrecientes.

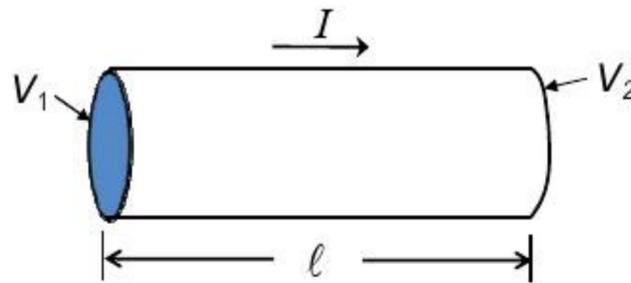


Figura 5.16. Cuando se aplica una ddp entre los extremos de un conductor, se establece una corriente I dirigida hacia el extremo que se encuentra a menor potencial.

El campo \vec{E} es puramente longitudinal, si hubiera componente perpendicular al alambre su superficie se cargaría; también es anti-paralelo a $d\vec{l}$, que va del extremo 2 al 1, luego el producto escalar será el producto de los módulos cambiado de signo: $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dl$. Por tanto,

$$\Delta V = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \int_2^1 dl = E \ell$$

donde ℓ es la longitud del alambre. Este campo implica que hay una densidad de corriente $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$ y una corriente:

$$I = \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} dS = J S, \quad \vec{J} \parallel \vec{n}$$

siendo S la sección transversal del alambre. Combinando estas ecuaciones queda,

$$I = J S = \sigma_c E S = \frac{\sigma_c S}{\ell} \Delta V$$

que nos da una relación lineal entre I y ΔV . La cantidad

$$\frac{\ell}{\sigma_c S} = R = \frac{\rho_c \ell}{S}$$

es la *resistencia* del conductor. Así que podemos escribir:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = RI$$

que es otra forma, más conocida, de expresar la ley de Ohm. Para los materiales óhmicos R es una constante si la temperatura a la que se mide permanece constante. La resistencia se mide en ohmios: 1 ohmio = 1 voltio / 1 amperio, o bien usando los símbolos: $1 \Omega = 1 \text{ V/1A}$.

A diferencia de la conductividad y resistividad, que son parámetros intrínsecos de cada material, la resistencia depende también de la geometría del mismo.

5.6 Circuitos eléctricos. Elementos

Vamos a estudiar en primer lugar circuitos alimentados por corrientes continuas. Para ello es necesario introducir una serie de elementos y símbolos convencionales que nos permitirán identificarlos. A la diferencia de potencial, ΔV , entre los extremos de una resistencia también la llamamos caída de potencial o caída de tensión.

5.6.1 Fuentes de fuerza electromotriz (fem)

Con objeto de tener una corriente continua en un conductor, necesitamos disponer de un suministro de energía eléctrica. El dispositivo que es capaz de suministrar este tipo de energía recibe el nombre de *fuerza de fuerza electromotriz* o, abreviadamente, *fuerza de fem*.

Como ejemplos podemos citar las baterías y pilas, que convierten la energía química en eléctrica.

Lo que hacen es realizar un trabajo sobre la carga que pasa a su través, elevando así su energía potencial. El *trabajo por unidad de carga* recibe el nombre de *fuerza electromotriz*,

\mathcal{E} , de la fuente; se mide en voltios. Una batería ideal mantiene una ddp constante entre sus terminales, independientemente del flujo de carga que haya entre ellos. En la Figura 5.17

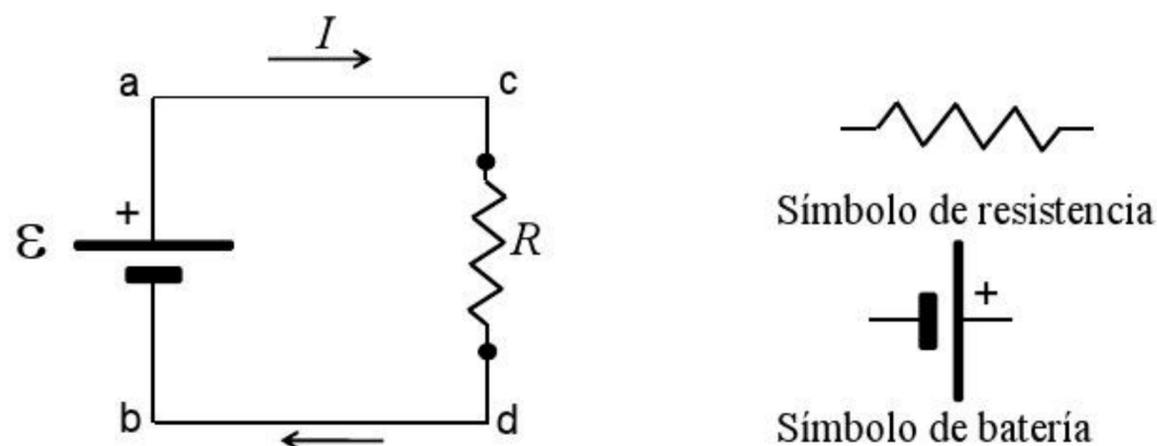


Figura 5.17. Circuito de corriente continua. Elementos.

se muestra un circuito formado por una resistencia conectada a una batería ideal.

La fuente mantiene una tensión ε entre los puntos a y b , que es la misma que existirá entre los puntos c y d ya que suponemos que la caída de potencial en los cables de conexión es despreciable. La intensidad de corriente será por tanto:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

y, según el convenio, circulará en sentido horario yendo del polo positivo al negativo. Observemos que dentro de la fuente, la corriente fluye del punto de potencial más bajo al de potencial más alto. Cuando la carga dq fluye de la fuente de fem, su energía potencial se ve aumentada en una cantidad $dU_e = dq\varepsilon$. El ritmo con el que la fuente suministra energía es su *potencia de salida*:

$$\frac{dU_e}{dt} = P = \frac{dq\varepsilon}{dt} = I\varepsilon$$

En una batería real, la ddp entre bornes es algo inferior a su fem. Ello es debido a que siempre hay una resistencia interna que hace que parte de la tensión caiga a través de ella.

5.6.2 Ley de Joule

Cuando se establece una ddp entre los extremos de una resistencia, como en la Figura 5.17, los electrones de la misma adquieren una energía cinética adicional. Pero esta energía se convierte rápidamente en energía interna de la resistencia, por colisiones de los electrones y los iones de la red. Ello provoca un aumento de la temperatura.

En el intervalo dt , la energía dU transformada en la resistencia será:

$$dU = dqV_{ab} = IdtV_{ab}$$

Por tanto, la rapidez con la que se transforma esta energía es:

$$P = \frac{dU}{dt} = IV_{ab} \quad (\text{potencia disipada})$$

Este efecto, que es termodinámicamente irreversible, se llama *calentamiento por efecto Joule*. Para la potencia disipada en R podemos poner ($R = V/I$):

$$P = IV_{ab} = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R}, \quad \text{ley de Joule}$$

La ley de joule es una forma particular de escribir el principio de conservación de la energía, para el caso en que la energía eléctrica se transforma en calorífica.

5.6.3 Combinaciones de resistencias

a) Resistencias en serie: Es el caso en que el extremo de una resistencia se conecta al de la resistencia contigua tal como se muestra en la Figura 5.18.

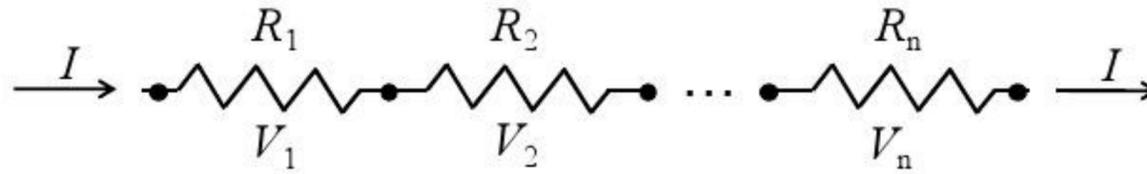


Figura 5.18. Conexión de resistencias en serie.

La corriente que circula por todas las resistencias es la misma y la caída de potencial en cada resistencia viene dada por:

$$V_1 = IR_1 \quad ; \quad V_2 = IR_2 \quad ; \dots ; \quad V_n = IR_n$$

La caída de potencial en toda la serie es:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

Concluimos que esta combinación puede sustituirse por una resistencia equivalente de valor:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

La resistencia equivalente es la suma de las resistencias que componen el circuito serie.

b) Resistencias en paralelo: La conexión es de la forma que se muestra en la Figura 5.19.

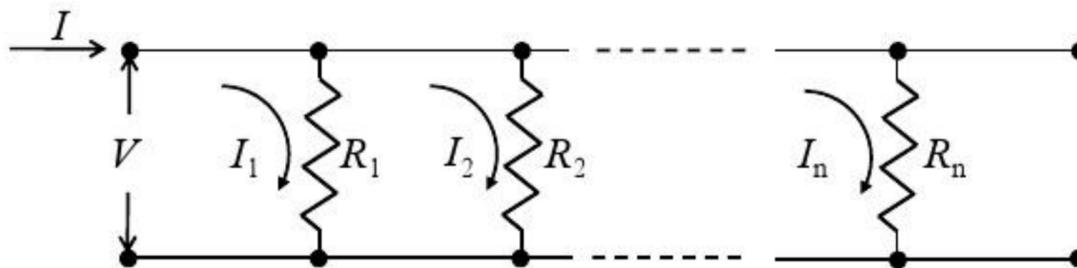


Figura 5.19. Conexión de resistencias en paralelo.

Observamos que la caída de potencial entre los extremos de las resistencias es la misma:

$$V = I_1 R_1 \quad ; \quad V = I_2 R_2 \quad ; \dots \quad V = I_n R_n$$

Además, la corriente total I es la suma de las corrientes que circula por cada una de ellas:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Por tanto, la resistencia equivalente será:

$$R_{eq} = \frac{V}{I} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_{eq}} = \frac{I}{V} = \frac{1}{V} \{I_1 + I_2 + \dots + I_n\} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

El inverso de la resistencia equivalente es la suma de los inversos de las resistencias que componen el circuito paralelo.

5.6.4 Descarga de un condensador a través de una resistencia

Este es un ejemplo de comportamiento transitorio; requiere una matemática un poco avanzada y se puede omitir sin perder continuidad en el desarrollo del tema.

La Figura 5.20 muestra un circuito que consta de un condensador de capacidad C , conectado por un extremo a una resistencia R mientras que entre los otros extremos se ha intercalado un interruptor S .

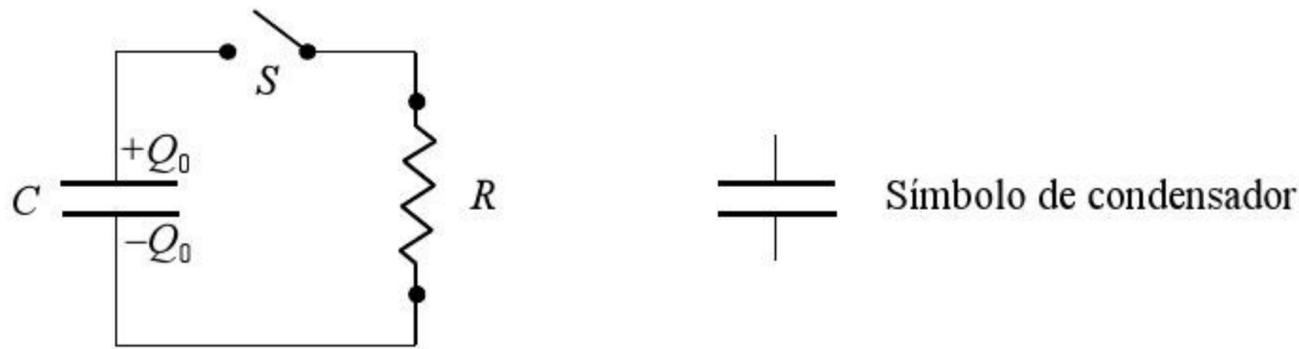


Figura 5.20. Condensador cargado con $\pm Q_0$ antes del cierre del interruptor

Antes de cerrar el interruptor el condensador se encuentra cargado con $\pm Q_0$ y habrá una ddp V_0 tal que:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}$$

Al cerrar el interruptor se establecerá una corriente en el sentido horario, que llevará la carga positiva hacia la negativa pasando por R . Esta variación de carga da lugar a una corriente, I :

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Por tanto, a medida que se va descargando el condensador, en el circuito tendremos circulando una corriente de forma que se cumpla la ecuación:

$$V = \frac{Q}{C} = IR$$

Sustituyendo I en función de Q :

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt}$$

O bien, separando las variables:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt$$

Integrando esta ecuación diferencial entre el instante inicial, $t = 0$, $Q = Q_0$, y un instante cualquiera del proceso de descarga, t , Q , se obtiene:

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Hemos obtenido que el proceso de descarga se realiza muy rápidamente, de manera exponencial. El producto RC tiene dimensiones de tiempo y se denomina *constante de tiempo*; normalmente se representa por el símbolo griego τ . La ecuación queda en la forma:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

También es fácil hallar la expresión de la corriente durante la descarga:

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

que es también un decrecimiento exponencial caracterizado por τ .

Debemos tener cuidado en el laboratorio cuando manipulamos condensadores, sobre todo los electrolíticos que son de gran capacidad. Si los tocamos cuando están cargados, sufriremos una descarga del tipo que acabamos de ver. Es conveniente descargarlos haciendo un cortocircuito entre los terminales.

5.7 Instrumentos de medida

Cuando se realizan prácticas de electricidad, se necesitan una serie de instrumentos que nos permitan medir las cantidades que intervienen, o sea, la corriente que circula, la fem suministrada por una batería, la resistencia que presenta un elemento, etc.

5.7.1 Galvanómetro y amperímetro

Son instrumentos que permiten medir la corriente que pasa por el circuito, o por una de sus ramas. Cuando se trata de valores muy pequeños, μA por ejemplo, se necesita una gran sensibilidad y se utiliza el galvanómetro.

El galvanómetro es un transductor analógico electromecánico que produce la rotación de una aguja o puntero en respuesta a la corriente eléctrica que fluye a través de su bobina, Figura 5.21.

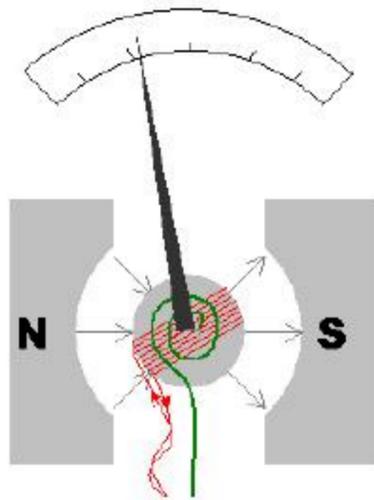


Figura 5.21. Esquema de un galvanómetro.

Este instrumento se ha de montar intercalado en serie con el circuito o rama que se desea caracterizar.

Para corrientes del orden de mA o mayores, el aparato utilizado es el amperímetro. Actualmente suministran una lectura digital.

En todo caso, estos medidores de corriente han de presentar una resistencia muy pequeña para no alterar el valor la corriente que deseamos medir.

5.7.2 Voltímetro

Un voltímetro es un instrumento que sirve para medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito eléctrico. Para ello se monta en paralelo con el elemento en el que se quiere medir, como se ve en la Figura 5.22.

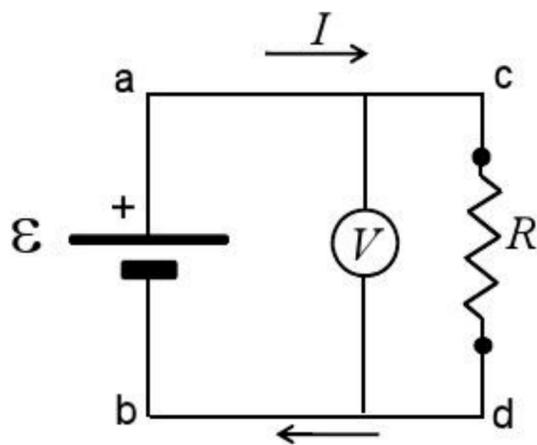


Figura 5.22. Montaje de un voltímetro para medir la caída de tensión en R .

La resistencia del voltímetro ha de ser muy elevada para no perturbar la medida. En efecto, al estar en paralelo con R , la resistencia equivalente será:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{volt}} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R \cdot R_{volt}}{R + R_{volt}} \approx R, \text{ para } R_{volt} \gg R$$

Hoy día se construyen voltímetros de lectura digital con varios $M\Omega$ de resistencia.

5.7.3 Óhmetro

Es un instrumento para medir resistencias eléctricas. El diseño de un óhmetro se compone de una pequeña batería que permite aplicar un voltaje a la resistencia bajo medida, para luego mediante un galvanómetro medir la corriente que circula a través de la resistencia.

La escala del galvanómetro está calibrada directamente en ohmios ya que por la ley de Ohm, al ser el voltaje de la batería un valor fijo, la intensidad circulante a través del galvanómetro sólo va a depender del valor de la resistencia a medir, esto es, a menor resistencia mayor intensidad de corriente y viceversa.

Hoy encontramos instrumentos, denominados *multímetros*, que pueden medir corrientes, voltajes y resistencias, dependiendo del modo que seleccionemos. Hay varias escalas en cada modo, a fin de tener un rango amplio de medidas.

En la Figura 5.23 se muestra una fotografía de uno de ellos con pantalla digital.



Figura 5.23. Fotografía mostrando un multímetro digital.

Dependiendo de dónde situemos el dial de selección de modo y la conexión del cable rojo, obtendremos una medida de corriente, voltaje o resistencia.

5.8 Magnetismo

Las cargas en movimiento o corrientes eléctricas perturban el espacio que las rodea de modo que si en él se coloca una carga en movimiento, sobre ella aparece una fuerza. Este espacio perturbado recibe el nombre de campo magnético \vec{B} . Una carga puntual q_0 que se mueve con velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza que viene dada por:

$$\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$$

Para determinar la orientación del campo magnético buscaríamos la dirección de la velocidad \vec{v} para la cual esta fuerza es máxima. La dirección del campo corresponde a la perpendicular a \vec{v} y \vec{F} con el sentido dado por la relación anterior. En este caso la magnitud de \vec{B} viene dada por:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{F}|}{q_0 |\vec{v}|}$$

La unidad de campo magnético en el SI es $N/(Cms^{-1})$. Esta unidad recibe el nombre de Tesla (T).

Todos los materiales son influenciados, en mayor o menor medida, por la presencia de un campo magnético. Hay algunos materiales, como el níquel, hierro, cobalto y sus aleaciones, que bajo la influencia de un campo magnético se convierten en imanes, es decir, materiales que, a su vez, generan campos magnéticos a su alrededor. Por lo tanto los imanes ejercen fuerzas de atracción y repulsión sobre otros imanes o sobre corrientes eléctricas.

Los fenómenos magnéticos fueron conocidos por los antiguos griegos. Se dice que se observaron por primera vez en la región de "Magnesia" en Asia Menor, de ahí el término magnetismo. Sabían que ciertas piedras atraían el hierro y que los trocitos de hierro atraídos, atraían a su vez a otros. La primera referencia al fenómeno del magnetismo se debe al Tales de Mileto, filósofo griego que vivió entre 625 a. C. y 545 a. C. La primera mención sobre la atracción de una aguja de hierro aparece en un trabajo realizado entre los años 20 y 100 de nuestra era: «La magnetita atrae a la aguja».

El científico Shen Kua (1031-1095) escribió sobre la brújula de aguja magnética y mejoró la precisión en la navegación empleando el concepto astronómico del norte absoluto. Hacia el siglo XII los chinos ya habían desarrollado una técnica lo suficientemente avanzada como para utilizar la brújula para mejorar la navegación.

El conocimiento del magnetismo se mantuvo limitado a los imanes, hasta que en 1820, Hans Christian Oersted, profesor de la Universidad de Copenhague, descubrió que un hilo conductor sobre el que circulaba una corriente ejercía una perturbación magnética a su alrededor que desviaba una aguja magnética situada en ese entorno. Muchos otros experimentos siguieron, con André-Marie Ampère, Carl Friedrich Gauss, Michael Faraday y otros que encontraron vínculos entre el magnetismo y la electricidad. James Clerk Maxwell sintetizó y explicó estas observaciones en sus ecuaciones de Maxwell. Unificó el magnetismo y la electricidad en un solo campo, el electromagnetismo. En 1905,

Einstein usó estas leyes para comprobar su teoría de la relatividad especial, mostrando que *la electricidad y el magnetismo estaban fundamentalmente vinculados*.

5.8.1 Imanes naturales y artificiales

Como ya se ha dicho, un imán es toda sustancia que posee o ha adquirido la propiedad de atraer el hierro. Normalmente son barras rectas o en forma de U, o bien agujas imantadas de forma geométrica regular y alargada. Existe dos tipos de imanes: 1) Imanes naturales como la magnetita (Fe_3O_4) que atraen al hierro y están compuestos por óxido de hierro. 2) Imanes artificiales, que se obtienen después de someterlos a un campo magnético generado, bien mediante imanes (Figura 5.24a) o bien mediante corrientes eléctricas, como los electroimanes (Figura 5.24b).

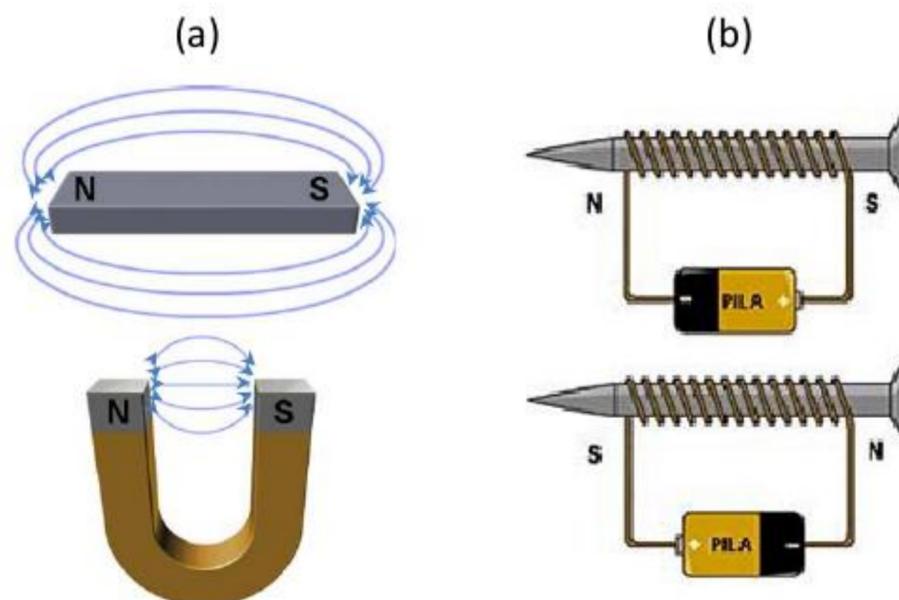


Figura 5.24. (a) Imán artificial permanente; (b) Electroimán.

Al igual que en el caso del comportamiento eléctrico, el comportamiento magnético está ligado a la estructura de los átomos que componen un material. Cada electrón es por su naturaleza un pequeño imán, debido al giro sobre sí mismo (*spin*). Además hay que contar también con el campo magnético debido al movimiento orbital del electrón alrededor del núcleo. El efecto global de estos pequeños imanes hace que algunos materiales se comporten como imanes. En resumen, el comportamiento magnético de un material depende de su estructura y, particularmente, de su configuración electrónica.

Para representar visualmente la distribución de campo en un imán y sus alrededores, utilizamos las líneas de campo con unas propiedades análogas a las del caso eléctrico. Hay una diferencia fundamental, y es que las líneas magnéticas siempre son *cerradas*.

Los imanes constan de dos polos: *polo norte* (N) y *polo sur* (S). Las líneas del campo magnético siempre nacen en el polo norte y mueren en el polo sur, tal como se representa en la Figura 5.24. Estos

polos jamás se pueden aislar, es decir, si partimos un imán en dos, cada uno de los trozos volverá a presentar un polo norte y un sur. Esto es consecuencia de que las líneas de campo magnético son cerradas.

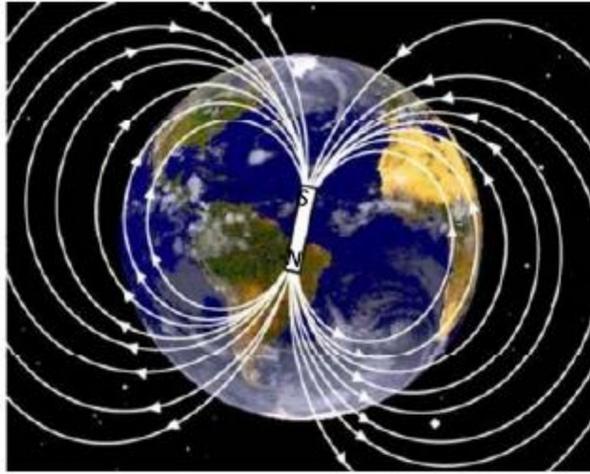


Figura 5.25. Campo magnético terrestre.

La Tierra tiene un campo magnético asociado y sus líneas de campo están representadas en la Figura 5.25. Se observa que el polo sur magnético está ligeramente inclinado con respecto al norte geográfico. El campo se extiende desde el núcleo atenuándose progresivamente en el espacio exterior. El campo magnético terrestre actúa como un escudo que nos protege del viento solar (partículas cargadas procedentes del sol moviéndose a gran velocidad).

Los imanes interactúan atrayéndose o repeliéndose. Si examinamos con detalle cómo se produce esta interacción vemos que *polos idénticos se repelen* (N-N, S-S) y *polos opuestos se atraen* (N-S). En la sección siguiente estudiaremos la interacción entre hilos recorridos por corrientes.

5.8.2 Fuerza magnética sobre corrientes. Inducción magnética. Ley de Biot y Savart

Imaginemos dos alambres rectos paralelos por los que pasan corrientes I_1 e I_2 como se muestra en la Figura 5.26. Realizando cuidadosos experimentos, Ampère demostró que si las corrientes llevan el mismo sentido aparecen fuerzas de atracción. Si se invierte el sentido de una de ellas, los alambres se repelen. Por otra parte, Ampère demostró que el valor de las fuerzas cambia si se modifican las corrientes, y también la forma o posición relativa de los conductores.

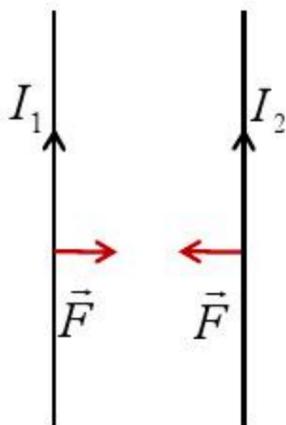


Figura 5.26. Interacción entre dos hilos de corriente paralelos.

Aparecen, pues, unas fuerzas asociadas al hecho de que existan cargas en movimiento. Para hallar su expresión matemática, tenemos que partir de un modelo basado en la existencia de un campo, Figura 5.27a. De la misma forma que asociamos un \vec{E} a una distribución estática de cargas y describimos la ley

experimental de Coulomb, $F \propto 1/r^2$, en este caso encontramos igualmente que todo elemento de corriente, $I_1 d\vec{l}_1$, crea en un punto P un campo de inducción magnética elemental, $d\vec{B}_1$, dado por:



Figura 5.27. Geometría para analizar: (a) el campo creado por un elemento de corriente; (b) la fuerza entre elementos de corriente

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} \quad ; \quad |d\vec{B}_1| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \sin\theta}{r^2}$$

Esta ley es conocida como ley de Biot y Savart, y fue deducida experimentalmente por ambos investigadores poco después de que Oersted descubriera que la corriente eléctrica afecta a la orientación de una brújula. El sentido de $d\vec{B}_1$ viene dado por la regla del tornillo: girando $I_1 d\vec{l}_1$ sobre \vec{r} por el camino más corto, el vector $d\vec{B}_1$ estaría en el sentido de avance del tornillo, como se muestra en la Figura 5.27a. La constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, es la permeabilidad magnética del vacío. El término $\frac{\mu_0}{4\pi}$ juega el mismo papel que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ en la ley de Coulomb, es decir, establece la compatibilidad entre una ley experimental y un sistema de unidades como es el SI. En el SI la inducción magnética se mide en teslas (T).

Examinando la ley de Biot y Savart vemos que, de nuevo, hay una dependencia del campo con $1/r^2$. Por ello las líneas de fuerza resultan útiles a la hora de representar el campo: son continuas y tangentes en cada punto del espacio a la dirección del mismo y su densidad es proporcional al módulo del campo. Pero, como ya vimos, las líneas magnéticas son cerradas.

Analicemos la fuerza que el campo elemental $d\vec{B}_1$ ejerce sobre un elemento de corriente $I_2 d\vec{l}_2$. De nuevo los experimentos conducen a una expresión de la fuerza dada por:

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 \quad , \quad |d\vec{F}_{12}| = (I_2 dl_2) dB_1 \sin\alpha$$

siendo α el ángulo entre los vectores $d\vec{l}_2$ y $d\vec{B}_1$. Poniendo el valor de $d\vec{B}_1$ explícitamente y

usando la notación de la Figura 5.27b, queda:

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

Ahora podemos sumar todas las contribuciones de los distintos elementos de corriente para

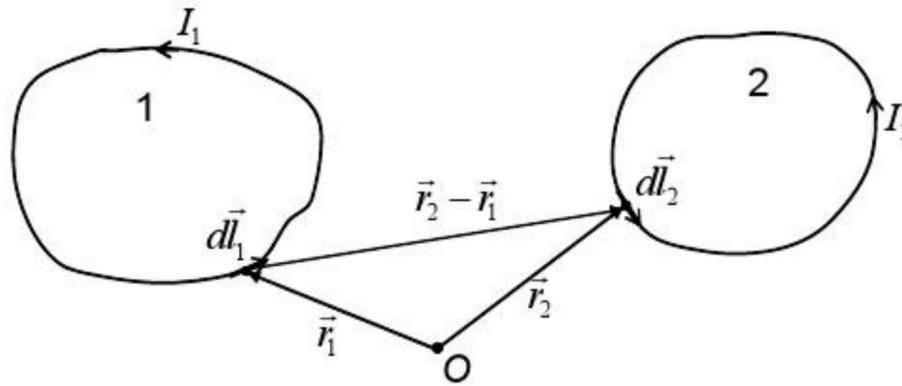


Figura 5.28. Geometría para hallar a fuerza entre dos conductores recorridos por corrientes.

determinar la fuerza entre dos conductores. De acuerdo con la geometría de la Figura 5.28, la inducción magnética que crea el circuito 1 en la posición del elemento $d\vec{l}_2$ está dada por:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_1 \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_1 \frac{d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

y la fuerza total que ejerce 1 sobre 2 será:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_2 \int_1 \frac{d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = Cte \cdot I_1 I_2$$

Esta ecuación expresa matemáticamente los resultados hallados por Ampère: La fuerza es proporcional a las corrientes que circulan por los conductores, y depende de la forma geométrica de los circuitos a través de las integrales extendidas a ambos. Esta ecuación es el fundamento de las prácticas que utilizan balanzas de corriente.

Ejemplo: Campo creado por un hilo recto indefinido, recorrido por una corriente I (Figura 5.29).

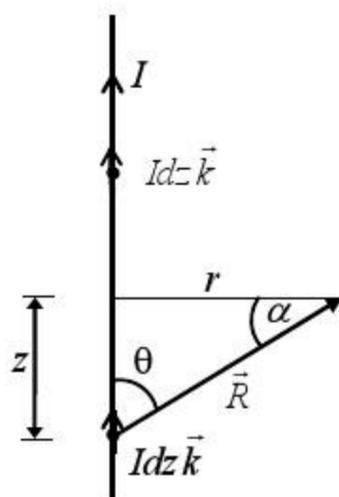


Figura 5.29. Geometría para hallar el campo creado por un hilo recto indefinido, recorrido por una corriente I . El hilo se sitúa en el eje z . Los elementos de corriente colocados en posiciones simétricas dan la misma contribución al campo.

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{z^2 + r^2}$$

De acuerdo con la ley de Biot y Savart, el campo creado por el elemento $Idz \vec{k}$ es en módulo:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|Idz \vec{k} \times \vec{R}|}{R^3} \equiv dB$$

Teniendo en cuenta que $\sin\theta = \cos\alpha$ la expresión se reduce a:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \sin\theta}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \cos\alpha}{R^2}$$

El vector $d\vec{B}$ va dirigido hacia dentro del papel. Si examinamos la contribución del elemento simétrico, veremos que es la misma en módulo y sentido. Por tanto, sumando entre los límites $\alpha = \pm \pi/2$ todas las contribuciones elementales de los módulos, el campo total será:

$$B = \int_{\text{hilo}} dB = \int_{\alpha=-\pi/2}^{\alpha=\pi/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cos\alpha \frac{dz}{R^2}$$

Para realizar la integral conviene hacer los siguientes cambios de variable:

$$z = r \operatorname{tg} \alpha \rightarrow dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad R = \frac{r}{\cos \alpha}$$

Operando y sacando fuera de la integral las cantidades constantes queda:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\alpha=-\pi/2}^{\alpha=\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\operatorname{sen} \alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Hemos obtenido que el campo creado por un hilo recto indefinido es proporcional a la corriente que lo recorre e inversamente proporcional a la distancia al hilo. Si utilizamos coordenadas cilíndricas (que son las adecuadas para la simetría del problema), el vector inducción magnética se expresa como:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

siendo \vec{u}_φ un vector unitario en la dirección acimutal. La Figura 5.30 muestra un esquema de las líneas de campo alrededor del hilo y su materialización con limaduras de hierro. Una regla útil para hallar el sentido del vector \vec{B} es señalar con el dedo pulgar de la mano derecha el sentido de la corriente, los restantes dedos indican el sentido de \vec{B} .

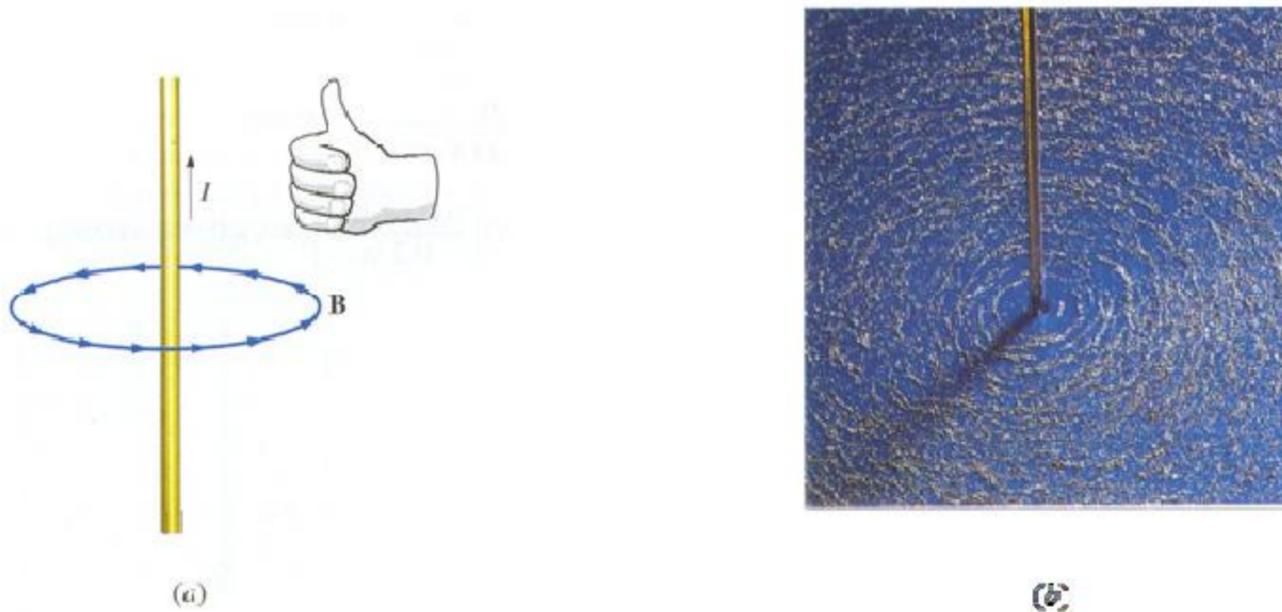


Figura 5.30. Líneas de campo alrededor de un hilo recto indefinido: (a) Regla de la mano derecha para determinar el sentido de \vec{B} de acuerdo con el sentido de la corriente I . (b) Visualización de las líneas con limaduras de hierro.

5.8.3 Fuerzas sobre cargas aisladas en movimiento

Hemos visto que la fuerza sobre un elemento de corriente $I d\vec{l}$ viene dada por:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Podemos poner I en función de la densidad de corriente y la sección del hilo, $I = \vec{J} \cdot \vec{S} = Nq\vec{v} \cdot \vec{S}$. Como en el hilo $d\vec{l} \parallel \vec{v}$, la fuerza queda expresada en la forma:

$$d\vec{F} = Nq dl S \vec{v} \times \vec{B}$$

Esta sería la fuerza sobre la carga total contenida en el volumen Sdl ; por tanto la fuerza sobre q será:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{F}}{NSdl} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se trata de una fuerza perpendicular a \vec{v} y \vec{B} ; ello implica que el campo no hace trabajo sobre q . Este resultado es igualmente válido para cargas puntuales aisladas, como por ejemplo las que forman un haz de partículas en tubos de vacío, en grandes instalaciones de aceleradores, etc. Normalmente estas

cargas se aceleran mediante campos eléctricos y después se someten a campos magnéticos que las desvían hacia las regiones de interés.

5.8.4 Flujo del vector inducción electromagnética

El flujo de \vec{B} a través de una superficie S es por definición:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{n}^\circ \text{ total de líneas que atraviesan } S.$$

El flujo se mide en webers: 1 weber (Wb) = 1 T·1 m².

Cuando la superficie es cerrada, teniendo en cuenta que no existen polos magnéticos aislados, se tendrá:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Es decir todas las líneas que entran por una parte de la superficie cerrada han de salir por otra dando un flujo neto nulo.

5.9 Circulación del vector inducción magnética. Ley de Ampère

La circulación de \vec{B} a lo largo de una línea C es por definición:

$$\Gamma = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Vamos a realizar este cálculo para el caso del campo magnético creado por un hilo recto indefinido. La línea a lo largo de la cual se realiza la integral es la circunferencia de radio r trazada en torno al hilo, Figura 5.31.

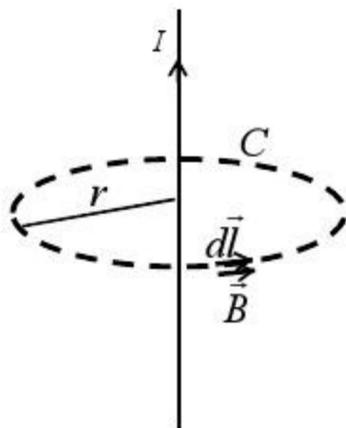


Figura 5.31. Geometría para hallar la circulación del vector inducción magnética a lo largo de la circunferencia C .

\vec{B} es tangente a la circunferencia en cada punto $\Rightarrow d\vec{l} \parallel \vec{B}$, y tiene el mismo módulo para todos los puntos situados en esa circunferencia. Calculemos el valor de la circulación:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C B dl = B \int_C dl = B 2\pi r$$

Recordemos que para el hilo recto indefinido se tiene $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior queda:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) 2\pi r = \mu_0 I$$

Este resultado constituye la ley de Ampère. Se puede generalizar a otras distribuciones de corriente y siempre que la línea sobre la que se integra sea cerrada.

Ley de Ampère: La circulación del campo magnético a lo largo de una línea cerrada que enlaza la corriente I es $\mu_0 I$.

Esta ley permite resolver de manera sencilla problemas en los que hay simetría de forma que resulta fácil calcular la circulación y despejar el valor B .

5.10 Inducción magnética. Ley de Faraday. Ley de Lenz

A principios de la década de 1830, Faraday en Inglaterra descubrió que un campo magnético que varíe con el tiempo es capaz de inducir una corriente en un conductor. A estas corrientes se las denomina *corrientes inducidas*. El fenómeno en sí, se conoce como inducción magnética.

Supongamos el montaje de la Figura 5.32:

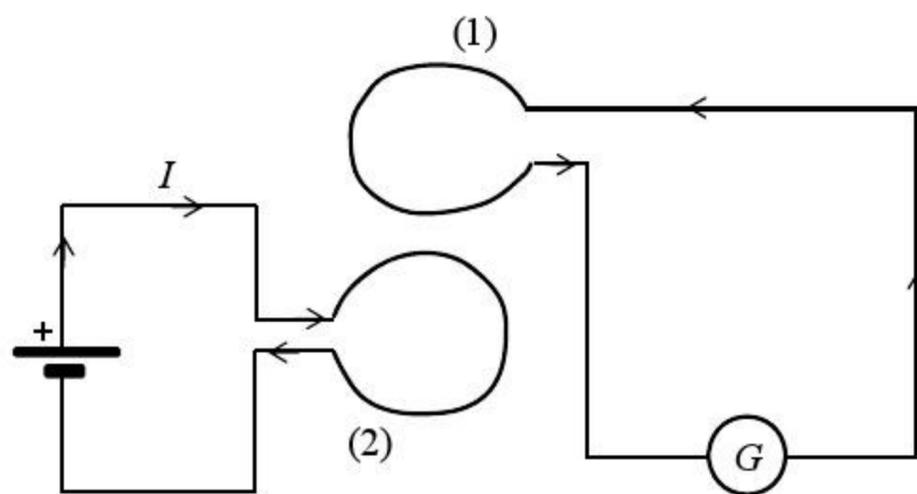


Figura 5.32. Montaje para reproducir los experimentos sobre inducción magnética.

Si las espiras (1) y (2) están quietas y la corriente I permanece constante, en el galvanómetro no observamos paso de corriente. Si bajamos (1) acercándola a (2), aparece una corriente en el sentido

indicado en la Figura 5.32. Si alejamos (1) de (2) aparece una corriente en el sentido opuesto. Faraday se dedicó a estudiar en detalle muy distintas posibilidades, acercando o alejando imanes a (1), etc. En todos los casos se deduce que la causa de la aparición de fem y corrientes inducidas es *la variación del flujo, Φ , que está atravesando dicha espira*. La manera de expresar matemáticamente este fenómeno es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Esta es la ley de Faraday que establece que: *Un campo magnético variable induce una fem en cualquier circuito cerrado, la cual viene dada por la derivada cambiada de signo del flujo magnético a través del circuito con respecto al tiempo.*

Si hay N espiras en el circuito (1) se tiene:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

Otro experimento consiste en dejar las dos espiras fijas y variar la corriente I . De nuevo observamos que si aumenta la corriente en (2), la corriente inducida en (1) tiene el sentido indicado en la Figura 5.32, y sentido opuesto cuando I decrece; al aumentar I aumenta el flujo que atraviesa (1).

Hasta ahora no hemos especificado cómo determinar el sentido de la fem y corrientes inducidas. La ley de Lenz facilita un criterio sencillo que permite establecerlos con claridad: *La corriente inducida aparece siempre en un sentido tal que se opone a la causa que la produce.*

En el experimento de la Figura 5.32, a medida que acercamos (1) a (2), la espira (1) es atravesada por un mayor número de líneas de campo; para tratar de compensarlo, aparece en (1) una corriente inducida en sentido opuesto a la que circula en (2), de tal forma que el campo que genera la corriente inducida en esta espira se resta del campo original creado por (2). Cuando alejamos las espiras, el flujo que atraviesa (1) disminuye, entonces la corriente inducida irá en el mismo sentido que la que recorre (2) para sumar su campo al original.

5.11 Generador eléctrico

La Figura 5.33 muestra el montaje de un generador de corriente alterna, cuyo fundamento es la ley de Faraday que acabamos de enunciar. Entre los polos N y S del imán se establece un campo B prácticamente uniforme, como indican las líneas de fuerza. Entre estos polos se coloca una bobina

formada por N espiras que giran a una velocidad constante ω . Este giro provoca que el flujo que las atraviesa sea función del tiempo.

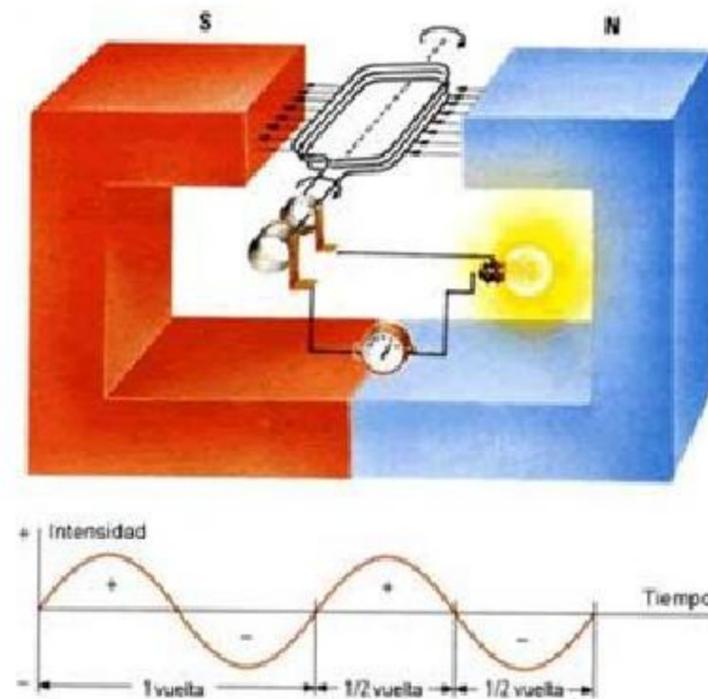


Figura 5.33. Montaje de un generador de corriente alterna.

Así, es máximo cuando las espiras están colocadas de forma paralela a las caras de los polos, y es nulo cuando forman 90° con ellas, que es la posición que se muestra en la figura 5.33. En un instante t cualquiera el flujo a través de una espira viene dado por:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B S \cos \theta = B S \cos \omega t$$

Para las N espiras se tendrá:

$$N\Phi = N\vec{B} \cdot \vec{S} = N B S \cos \omega t$$

y la fem inducida será:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} (B S \cos \omega t) = N B S \omega \text{sen } \omega t$$

Vemos que la fem inducida es de forma sinusoidal. Si las bobinas se conectan a un circuito con un amperímetro y una bombilla, veremos que ésta se pone a brillar cuando la corriente que la atraviesa es lo suficientemente grande como para calentar el filamento al rojo. Si la resistencia del circuito es R , la corriente que circula es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega N S B}{R} \text{sen } \omega t$$

En la parte inferior de la Figura 5.33 se ha dibujado la gráfica de esta corriente. Al ser una función seno va tomando valores positivos o negativos según el semiciclo en el que se encuentre.

Los generadores eléctricos que suministran energía a la población y a las industrias se basan en este esquema de funcionamiento, aunque son mucho más grandes y complejos. La energía para mover las bobinas proviene de diversas fuentes: hidráulica, vapor de agua, etc. En América $\omega = 2\pi \cdot 60 \text{ s}^{-1}$ y en Europa $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}$.

Existen otros tipos de generadores, tanto de corriente continua como de alterna que, si hay material necesario, podremos estudiar en el laboratorio.

Nota: La Unidad 5 sobre electromagnetismo se ha reducido a presentar los conceptos más elementales. Algunos de ellos se ampliarán en el laboratorio. También es posible consultar páginas web. Por ejemplo, para estudiar el fundamento de los galvanómetros se puede consultar la página web:

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_magnetico/galvanometro/galvanometro.htm

UNIDAD 6. ÓPTICA Y ACÚSTICA

6.1. Espectro electromagnético

Las ondas electromagnéticas son producidas por vibraciones de campos eléctricos y magnéticos. No necesitan de medio material para su propagación. Son doblemente transversales: el campo eléctrico y el magnético son perpendiculares entre sí y ambos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, como se ilustra en la Figura 6.1.

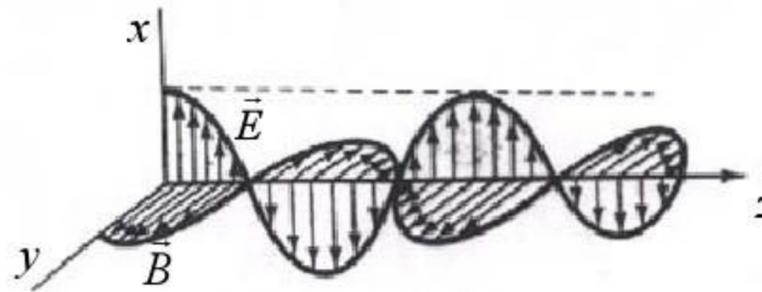


Figura 6.1. Campos eléctrico y magnéticos de una onda propagándose en la dirección z.

Maxwell demostró que la luz consiste en este tipo de ondas y forma parte de lo que se denomina *espectro electromagnético*, y que todas ellas se propagan con la misma velocidad en el vacío $c = 3 \times 10^8$ m/s. Cada onda se caracteriza por su frecuencia, f , o, de forma equivalente, por su longitud de onda, $\lambda = \frac{c}{f}$. En la Tabla 6.1 se da la clasificación del espectro de acuerdo con el valor de estos

parámetros. La parte visible corresponde al rango $400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}$.

BANDA	FRECUENCIA	LONG. DE ONDA	DENOMINACIÓN
ELF	< 3 kHz	> 100 km	Extremely Low Frequency
VLF	3-30 kHz	100-10 km	Very Low Frequency
LF	30-300 kHz	10-1 km	Low Frequency
MF	0,3-3 MHz	1.000-100 m	Medium Frequency
HF	3-30 MHz	100-10 m	High Frequency
VHF	30-300 MHz	10-1 m	Very High Frequency
UHF	0,3-3 GHz	100-10 cm	Ultra High Frequency
SHF	3-30 GHz	10-1 cm	Super High Frequency
EHF	30-300 GHz	10-1 mm	Extremely High Frequency
IR	300-800 GHz	1-0,4 mm	Región submilimétrica
V	800 GHz-400 THz	0,4 mm-0,8 micras	Infrarrojo
UV	400-750 THz	0,8-0,4 micras	Visible
	750-10.000 THz	400-12 nanómetros	Ultravioleta
		120-0,6 angstrom	Rayos X

Tabla 6.1. Espectro electromagnético.

El origen de todas estas ondas se basa en el hecho de que *toda carga eléctrica acelerada emite energía en forma de radiación electromagnética*. Por ejemplo, los cuerpos calientes producen radiación infrarroja debido a las oscilaciones de sus átomos; la luz visible es producida por oscilaciones de los electrones más externos del átomo; la radiación ultravioleta proviene de oscilaciones de electrones en regiones más internas del átomo, y los rayos X de los electrones más próximos al núcleo. También, en los grandes aceleradores tipo sincrotrón, los electrones describiendo órbitas cerradas a grandes velocidades son capaces de producir ondas electromagnéticas que cubren una gran parte del espectro. Citemos también el gran número de fuentes de radiación de origen cósmico: estrellas, radiofuentes como la nebulosa del Cangrejo y Júpiter, rayos cósmicos, etc.

El espectro electromagnético no tiene definidos sus límites, tanto superior como inferior. Se suele dividir en bandas para las que se diseñan métodos de estudio y aplicaciones diferentes: radiofrecuencia, microondas, radiación UV, etc. En lo que sigue vamos a caracterizar el comportamiento de las ondas en el rango de luz visible, aunque en algunos casos los resultados sean aplicables a otros rangos y otros tipos de ondas.

6.2. Óptica geométrica

La óptica geométrica parte de las leyes fenomenológicas de la reflexión y la refracción de haces luminosos. A partir de ellas, basta hacer razonamientos de tipo geométrico para la obtención de las fórmulas que explican el comportamiento de los espejos y lentes (o sus combinaciones), obteniendo así las leyes que gobiernan los instrumentos ópticos. La óptica geométrica usa la noción de *rayo luminoso*; es una aproximación del comportamiento que corresponde a las ondas electromagnéticas cuando los objetos involucrados son de tamaño mucho mayor que la longitud de onda usada; ello permite despreciar los efectos derivados de la difracción, comportamiento ligado a la naturaleza ondulatoria de la luz.

Las imágenes que forman los instrumentos ópticos pueden ser *imágenes reales* o *virtuales*. En el primer caso, la energía luminosa realmente pasa por el punto donde se forma la imagen. En el caso de la imagen virtual, la luz se comporta como si saliera de ese punto aún cuando, de hecho, no pasa por él.

6.2.1 Reflexión: Espejos

En general, cuando un haz de luz llega a la superficie de separación entre dos medios, una parte se refleja y vuelve a propagarse en el medio por el que venía haciéndolo; otra parte pasa al segundo medio refractándose. Analizaremos en esta sección el primer fenómeno y lo aplicaremos al estudio de los

espejos, que son superficies pulidas de forma que no dejan pasar a su través la luz incidente (toda la luz se refleja).

Las leyes de la reflexión son las siguientes:

1. El rayo reflejado está en el plano formado por el rayo incidente y la recta normal a la superficie en el punto de incidencia.
2. El ángulo formado entre el rayo incidente y la recta normal es igual al ángulo que existe entre el rayo reflejado y la recta normal.

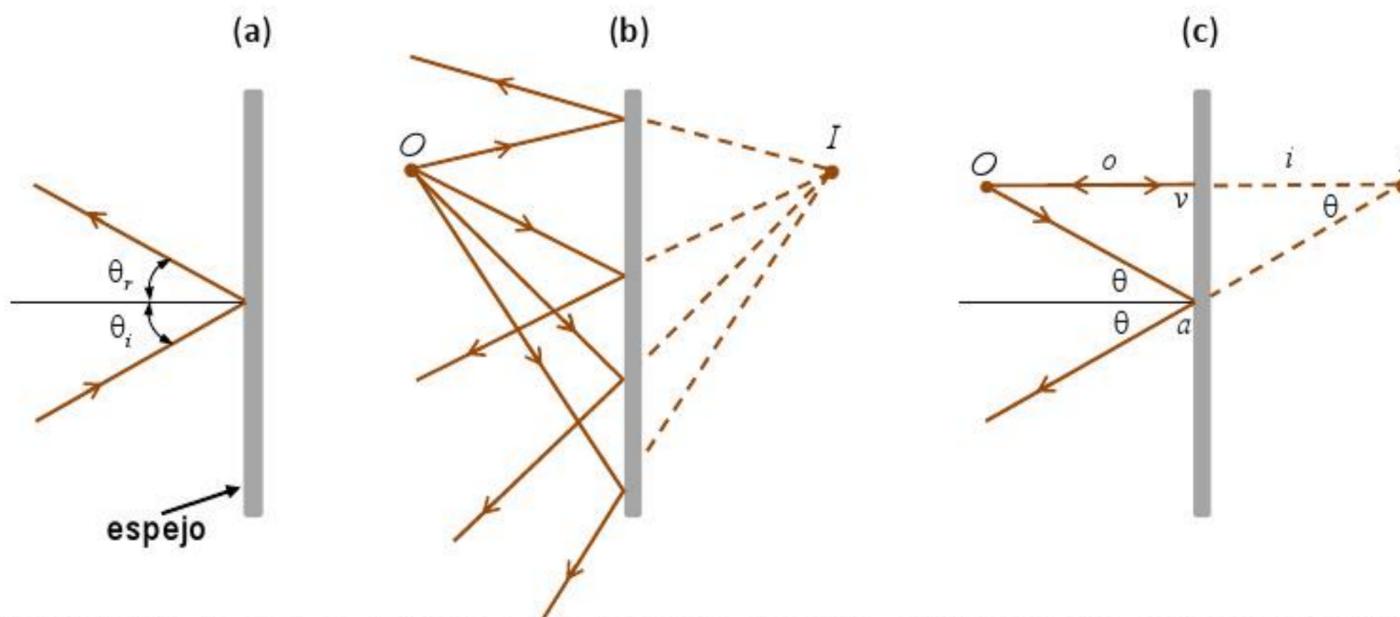


Figura 6.2.(a) Reflexión de un rayo incidente sobre un espejo plano; (b) y (c) Formación de la imagen virtual en espejos planos.

Estas leyes se ilustran en la Figura 6.2.(a) donde se muestra un rayo de luz que incide sobre un espejo plano, se cumple $\theta_i = \theta_r$. La Figura 6.2.(b) muestra la imagen, I , producida por el punto luminoso, O . Vemos que se trata de una imagen virtual, ya que se forma al otro lado del espejo, donde no penetra el haz. En la figura 6.2.(c) podemos hacer un análisis geométrico para determinar la posición de I ; sólo se necesita para ello dos rayos que se corten. Por ser alternos internos los ángulos aOv y θ son iguales; también son iguales vIa y θ ; por consiguiente los triángulos $aOva$ y $vIav$ son también iguales y opuestos. El vértice I se encuentra a la misma distancia del plano del espejo que el O y se cumple:

$$o = -i$$

donde el signo menos se ha introducido por convención para hacer notar que está en el lado opuesto al del punto objeto. Cuando el objeto es un volumen, realizando esta operación para los puntos que lo componen se obtiene un efecto de inversión en profundidad y tal que, por ejemplo, nuestra mano derecha se ve reflejada como nuestra mano izquierda.

Espejos esféricos: En la figura 6.3 se muestran dos rayos que salen del punto O y se reflejan en un espejo esférico cóncavo cuyo radio de curvatura es R . El primero se propaga a lo largo del eje horizontal y se refleja sobre sí mismo; el segundo forma un ángulo arbitrario α con dicho eje e incide en el punto a .

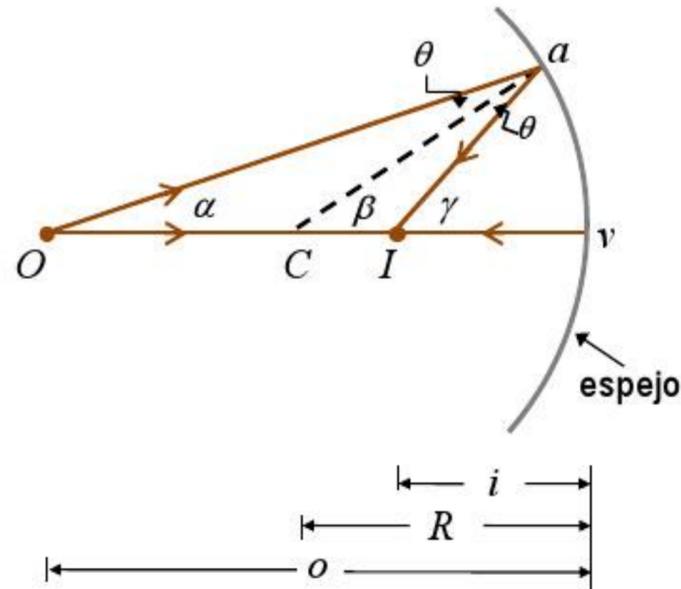


Figura 6.3. Dos rayos que salen de O y se reflejan en un espejo esférico formando una imagen I .

Al reflejarse corta al eje en I determinando así la posición de la imagen del punto O . Se trata de una *imagen real* porque la onda reflejada pasa por ese punto. Para determinar el valor de esta posición, haremos uso de un teorema que establece que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Aplicando este teorema a los triángulos $OaCO$ y $OaIO$ de la Figura 6.3, resulta:

$$\beta = \alpha + \theta$$

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

Eliminando θ entre las dos ecuaciones queda:

$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

En la figura los ángulos están exagerados para mayor claridad. En lo que sigue, vamos a suponer que α es muy pequeño y el rayo se separa muy poco del eje, es decir es un *rayo paraxial*. En ese caso β y γ serán también muy pequeños. Entonces, expresado los ángulos en radianes, se tiene:

$$\alpha \cong \frac{av}{vO} = \frac{av}{o}; \quad \beta = \frac{av}{vC} = \frac{av}{R}; \quad \gamma \cong \frac{av}{vI} = \frac{av}{i}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior queda finalmente:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{R} \quad (*)$$

siendo o , i , las distancias objeto e imagen medidas desde el punto v . Observamos que la relación entre ambas no dependen de los ángulos, de modo que es válida para todos los rayos siempre que queden dentro de la aproximación paraxial. Esto podemos conseguirlo colocando un diafragma en O para seleccionar en el haz sólo aquellos rayos que la cumplan. Ello tiene el inconveniente de disminuir el brillo de la imagen, si bien se formará nítidamente. Por el contrario, si dejamos pasar rayos no paraxiales, la imagen que se forma es más brillante pero deja de ser un punto para convertirse en una mancha.

Se puede aplicar un razonamiento análogo al caso en que la superficie del espejo es convexa. Entonces los rayos incidentes se reflejan divergiendo y la imagen que forman queda al otro lado del espejo, siendo una imagen virtual. Se cumple la misma relación que para espejos cóncavos pero i y R son negativos.

Ejemplo: Un espejo convexo tiene un radio de curvatura de 20 cm. Si se coloca una fuente luminosa a 14 cm del espejo, ¿dónde se forma la imagen?

Solución: Sustituyendo en la ecuación que relaciona estas tres cantidades se tiene:

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{i} = \frac{2}{-20} \rightarrow i = -5,8 \text{ cm.}$$

El signo negativo nos indica que la imagen es virtual.

Para analizar las características de las imágenes formadas por los espejos esféricos, consideremos objetos no puntuales como el objeto O representado en la Figura 6.4.

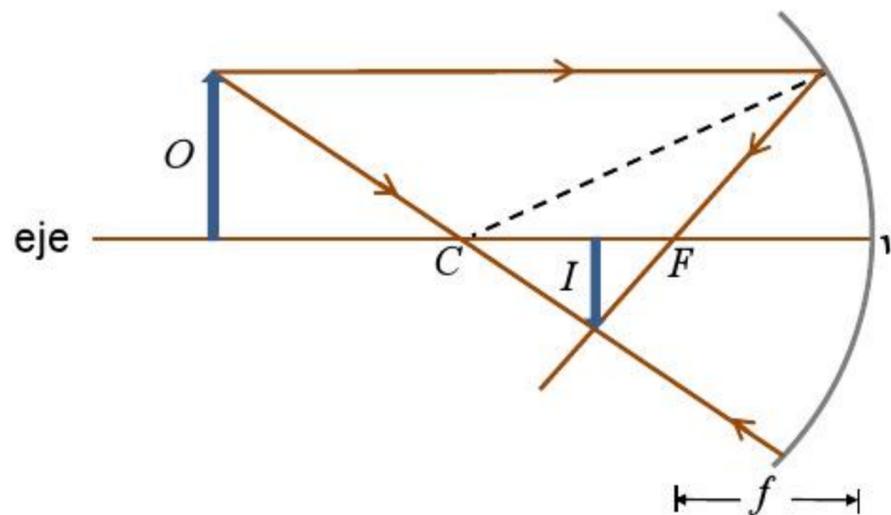


Figura 6.4. Formación de imágenes en un espejo cóncavo.

Cuando un rayo llega paralelo al eje (punto en el infinito) a una distancia igual al extremo de O , se refleja cortando al eje en un punto llamado *foco*, F , del espejo; la *distancia focal*, f , es la distancia entre F y el vértice v . Si en la ecuación (*) hacemos $o \rightarrow \infty, i = f$, queda:

$$f = \frac{1}{2}R$$

que nos dice que la distancia focal es igual a la mitad del radio de curvatura. Por otra parte, si trazamos desde el extremo de O un rayo que pasa por el centro de curvatura, C , se reflejará volviendo por el mismo camino. El punto de cruce de ambos rayos determina la posición y el tamaño de la imagen, I , como se ve en la Figura 6.4. Teniendo en cuenta el resultado anterior, la relación entre las distancias objeto e imagen queda en la forma,

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Ecuación en la que f , lo mismo que hacíamos con R , tiene un valor positivo. Para espejos convexos, f y R tendrán un valor negativo.

Finalmente, señalaremos que la imagen formada en la Figura 6.4 está invertida respecto del objeto.

Se denomina aumento lateral, m , al cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto. Para determinarlo examinemos la Figura 6.5. Se ha trazado un rayo que sale del extremo de O y llega al vértice de espejo v . El rayo reflejado pasa por el extremo de la imagen y, debido a la ley de la reflexión, forma el mismo ángulo con el eje que el rayo incidente. Para los dos triángulos rectángulos semejantes que se forman, podemos escribir:

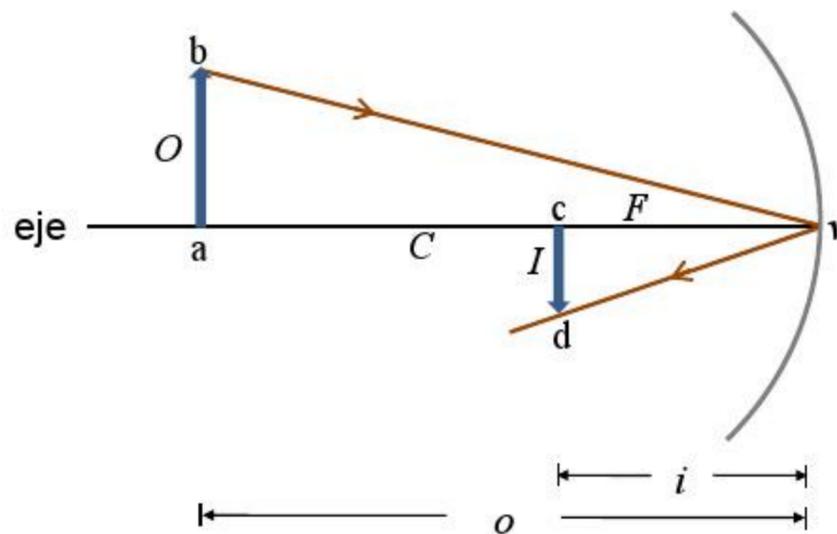


Figura 6.5. Formación de imágenes en un espejo cóncavo: análisis del tamaño de la imagen.

$$\frac{cd}{ab} = \frac{vc}{va}$$

El primer miembro es, salvo el signo, el *aumento lateral* del espejo; el numerador y denominador del segundo miembro son las distancias al vértice del objeto y su imagen:

$$m = -\frac{i}{o}$$

donde hemos incluido el signo menos para indicar que la imagen está invertida.

6.2.2. Refracción: Lentes

Cuando incide un rayo de luz sobre una superficie que no es totalmente reflectante, éste se transmite en parte y se propaga en el segundo medio un rayo que llamamos *refractado*, como se muestra en la Figura 6.6.

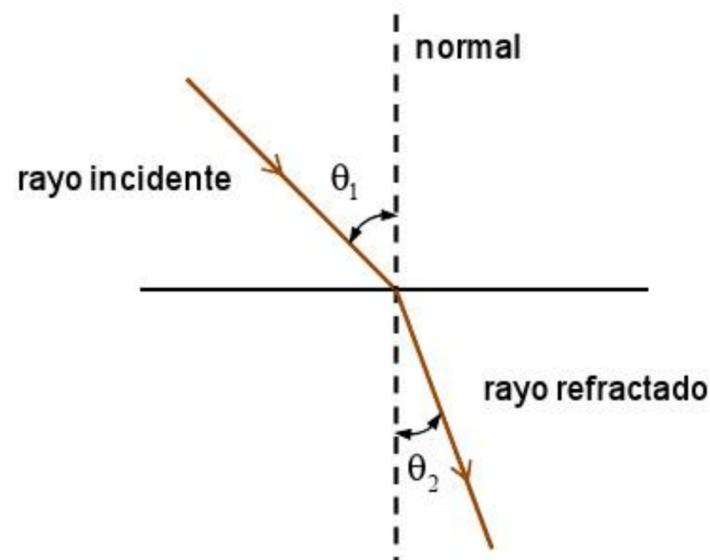


Figura 6.6. Refracción en una interfase.

Las leyes de la refracción son las siguientes:

1. El rayo incidente, el rayo refractado y la recta normal a la superficie están en el mismo plano con respecto a la superficie de refracción en el punto de incidencia.
2. Ley de Snell: El ángulo formado entre el rayo refractado y la recta normal está relacionado con el ángulo del rayo incidente mediante la ecuación:

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = n_{21}$$

siendo n_{21} una constante denominada *índice de refracción* del medio 2 con respecto al medio 1. En la Tabla 6.2 se listan los índices de refracción de varios medios con respecto al vacío, para un haz de longitud de onda $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ (luz de sodio)

Medio	Índice de refracción
Agua	1,33
Alcohol etílico	1,36
Aire (1 atm y 20° C)	1,0003
Cuarzo fundido	1,46
Cristal (crown)	1,52
Cloruro de sodio	1,53
Polietileno	1,50 - 1,54
Yoduro de metileno	1,74

Tabla 6.2. Índice de refracción respecto del vacío, $\lambda = 5890 \text{ \AA}$.

Vamos a estudiar la aplicación de este fenómeno al diseño de lentes ópticas. Empezaremos considerando una superficie esférica convexa refractora como la de la Figura 6.7. El radio de

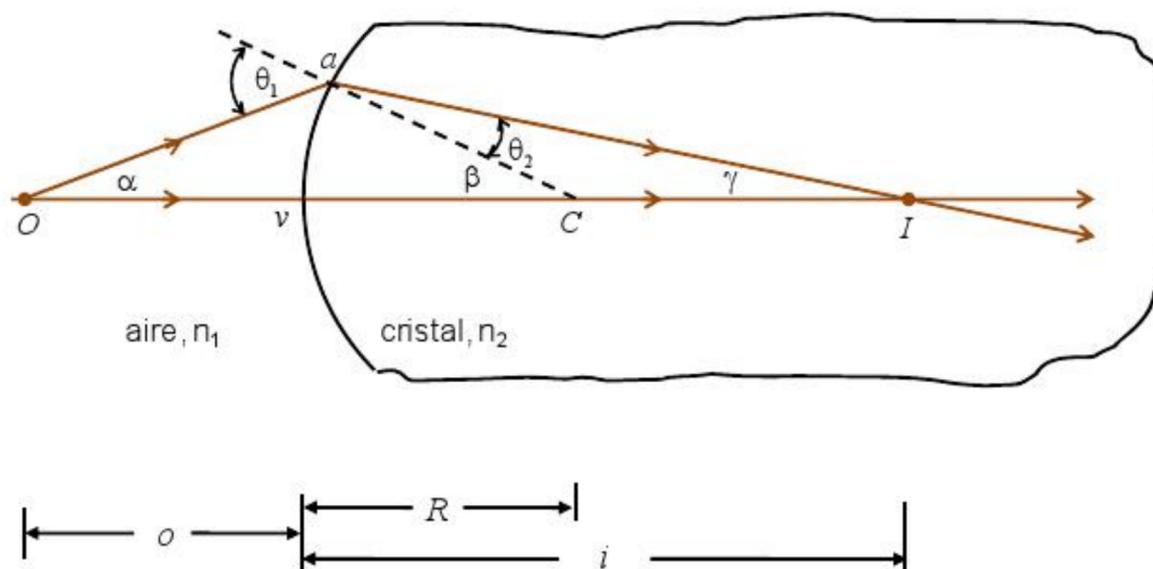


Figura 6.7. Formación de imágenes en una superficie esférica convexa refractora.

curvatura es R , el medio donde está el objeto tiene un índice de refracción n_1 y el cristal al otro lado de la superficie tiene un índice n_2 . Desde O trazamos una línea que pasa por el centro de curvatura C de la superficie refringente y la corta en el punto v ; un rayo alojado en este eje no sufre desviación al cambiar de medio. Trazamos también un rayo que forma un ángulo pequeño, α , con dicho eje y llega a la superficie en el punto a , refractándose según la ley:

$$n_1 \text{sen } \theta_1 = n_2 \text{sen } \theta_2$$

El rayo refractado corta al rayo sobre el eje en I formando así la imagen de O . Para los triángulos $COaC$ y $ICaI$ se tiene:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad , \quad \beta = \theta_2 + \gamma$$

Si nos ceñimos a la aproximación paraxial, todos estos ángulos serán mucho menores que un radián y los senos se pueden sustituir por los ángulos mismos. La ley de la refracción será:

$$n_1 \theta_1 \cong n_2 \theta_2 \quad \rightarrow \quad \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1$$

Sustituyendo en la ecuación para β resulta:

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma$$

Eliminando θ_1 entre esta ecuación y la escrita para el triángulo $COaC$ se obtiene la relación:

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta$$

Medidos en radianes, los ángulos α, β y γ en la Figura 6.7 son:

$$\alpha \cong \frac{av}{o} \quad ; \quad \beta = \frac{av}{R} \quad ; \quad \gamma \cong \frac{av}{i}$$

Siempre que los rayos sean *paraxiales*, estas ecuaciones son válidas. Sustituyéndolas en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Lo mismo que en la fórmula de los espejos, debe tenerse cuidado en los signos de o, i, R . Como el objeto es real y la imagen también, en este caso los tres valores son positivos. En la Figura 6.8 se muestra el caso de una superficie esférica cóncava. Se ha trazado un rayo a lo largo del eje y otro que forma un ángulo α con el mismo. Este rayo incide formando un ángulo θ_1

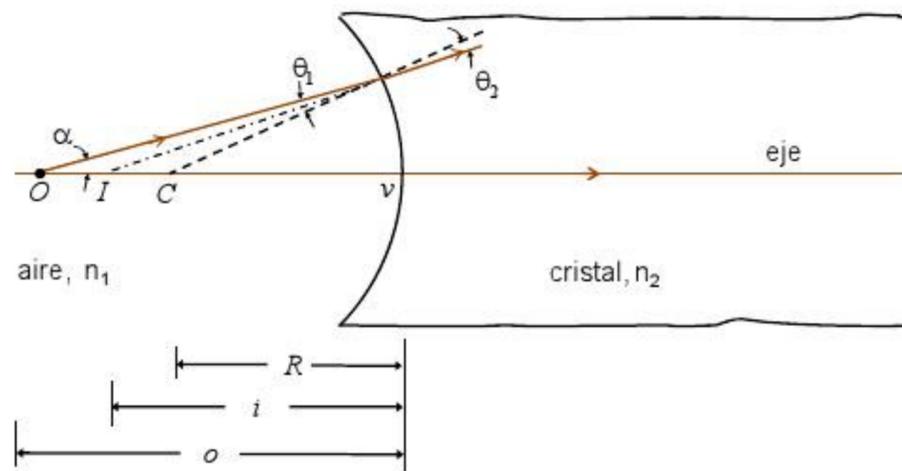


Figura 6.8. Formación de imágenes en una superficie esférica cóncava refractora.

con la normal a la superficie de separación y se refracta con un ángulo $\theta_2 < \theta_1$ ya que el índice de refracción del vidrio es mayor que el del aire. Por tanto, como se ve en la figura es un rayo divergente que forma una imagen virtual en I . La ecuación que relaciona estas distancias y los índices de refracción es análoga a la de las superficies convexas:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

pero tanto I como R son negativos por estar el radio de curvatura en la misma región que la imagen virtual.

Ejemplo: Suponiendo que en la Figura 6.8 el punto objeto se sitúa a 20 cm a la izquierda de v , el radio de curvatura es de 10 cm, $n_2 = 2.0$ y $n_1 = 1.0$, ¿dónde se forma la imagen?

Solución: Sustituyendo los datos en la ecuación que relaciona esta tres cantidades se tiene:

$$\frac{1,0}{20} + \frac{2,0}{i} = \frac{2,0 - 1,0}{-10} \rightarrow i = -13,3 \text{ cm.}$$

donde el signo negativo está de acuerdo con el criterio asignado a una imagen virtual.

Lentes delgadas

En muchas aplicaciones no hay solo una superficie refractora sino dos o más. Por ejemplo, en las gafas la luz incide desde el aire sobre el vidrio, lo atraviesa y vuelve a emerger al aire. La Figura 6.9 ilustra esta situación: una lente de cristal de longitud L , de radios de curvatura

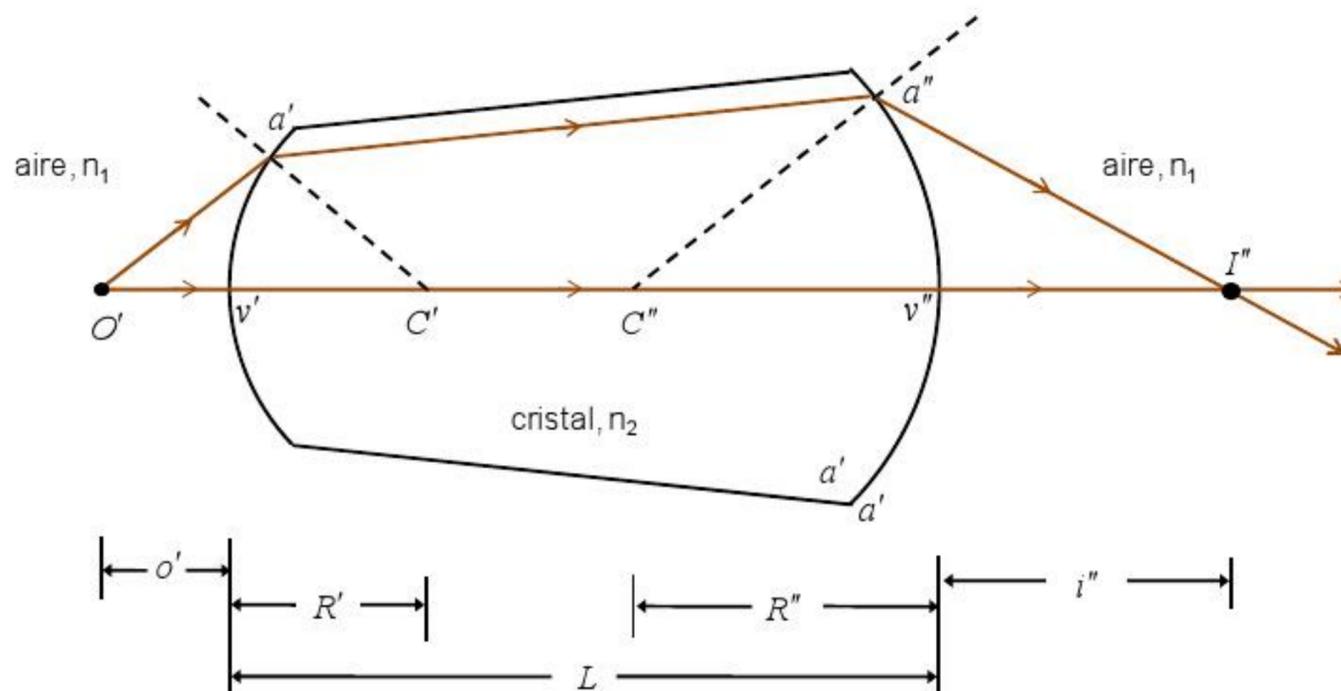


Figura 6.9. Dos rayos que emergen de O' forman un imagen en I'' después de refractarse en dos superficies esféricas.

R' y R'' . Un punto luminoso O' emite un rayo a lo largo del eje y no sufre desviación en ninguna de las dos superficies refractoras. Un segundo rayo trazado desde O' incide en la primera superficie en a' , se refracta y llega a la segunda en a'' donde vuelve a refractarse para cortar al eje en I'' .

Para ver en detalle la formación de esta imagen vamos a descomponer el proceso en dos etapas: una con la primera refracción, Figura 6.10.(a) y otra que continúa el análisis en la segunda superficie, Figura 6.10.(b). Para simplificar la notación, se supone que el medio 1 es aire cuyo índice de refracción es $n = 1.0$, y que el medio 2 tiene un índice $n_2 = n$.

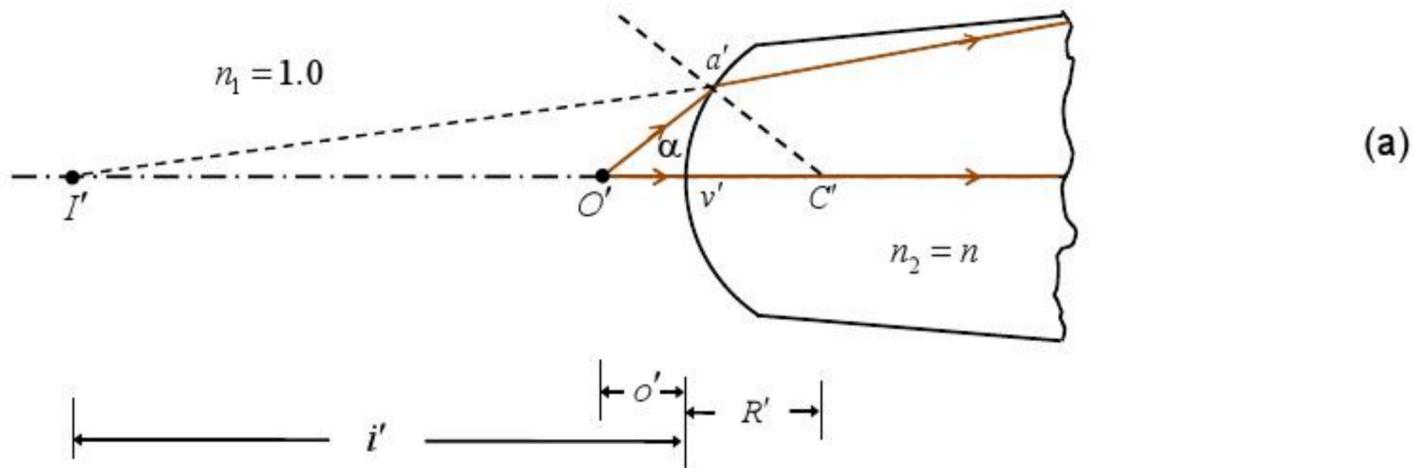


Figura 6.10.(a). Primera etapa de la formación de imágenes en la lente de la Figura 6.9.

En la Figura 6.10.(a) se muestra la formación de la *imagen virtual* I' a partir de O' . Para localizar su posición utilizamos la fórmula que acabamos de obtener, particularizada a la notación actual:

$$\frac{1}{o'} - \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{R'}$$

donde i' será un número positivo porque su signo se ha puesto explícitamente en la ecuación.

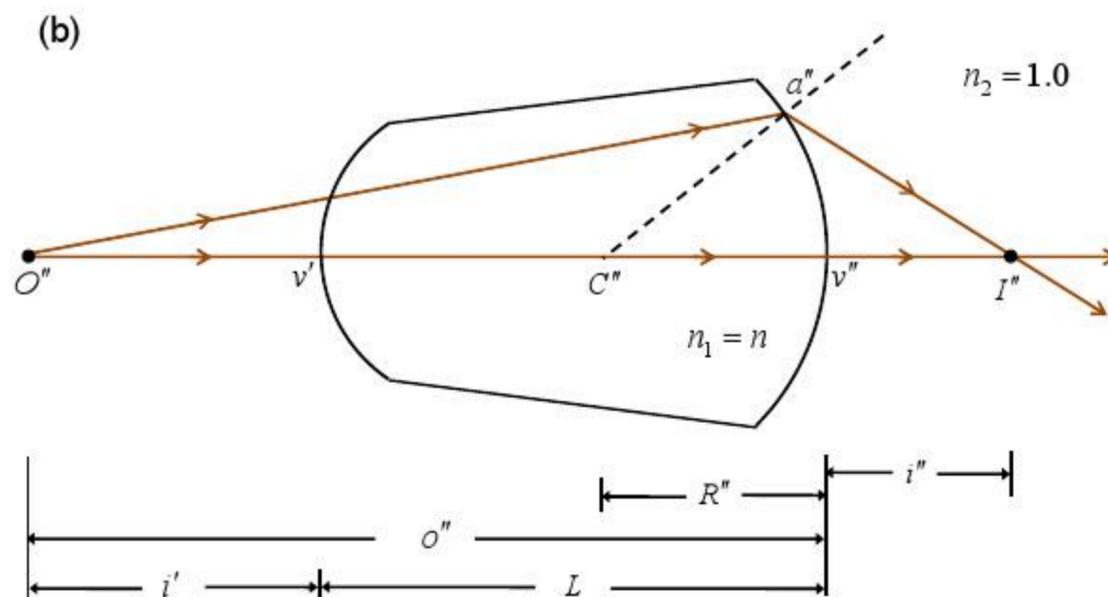


Figura 6.10.(b). Segunda etapa de la formación de imágenes en la lente de la Figura 6.9.

En la Figura 6.10.(b) se muestra el comportamiento de los rayos al atravesar la segunda superficie. La imagen I' (virtual) de la primera etapa actúa como punto objeto de la segunda, $O'' \equiv I'$. Según el diagrama se cumple:

$$o'' = i' + L$$

Además ahora el medio 1 tiene índice de refracción n y el medio 2 es aire. Por tanto se cumplirá:

$$\frac{n}{i' + L} + \frac{1}{i''} = \frac{1 - n}{R''}$$

Supongamos que el espesor L de esta lente es tan pequeño que puede despreciarse frente a las otras magnitudes, es decir, se trata de una lente delgada. La ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{n}{i'} + \frac{1}{i''} = -\frac{n-1}{R''}$$

Si sumamos esta ecuación y la obtenida en la primera etapa queda:

$$\frac{1}{o'} + \frac{1}{i''} = (n-1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \right)$$

Por último, si consideramos todo el proceso de una vez y llamando a la distancia objeto o y a la distancia imagen i , esta ecuación se transforma en.

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n-1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \right)$$

Recordemos que es válida sólo para rayos paraxiales y lentes delgadas.

Para caracterizar estas lentes por sus distancias focales, tenemos que hallar la posición de los focos. La figura 6.11 muestra un haz de rayos que llegan paralelos al eje de una lente biconcava, es decir el objeto se encuentra en el infinito, y convergen en el llamado *segundo foco*, F_2 . La distancia de F_2 a la lente se llama *distancia focal*, f . Análogamente, el *primer foco* de una lente delgada (F_1 en la Figura 6.11) es la posición del objeto para el cual los rayos salen paralelos de la lente. Para las lentes delgadas, el primer y segundo foco se encuentran en lados opuestos de la lente y son equidistante de la misma.

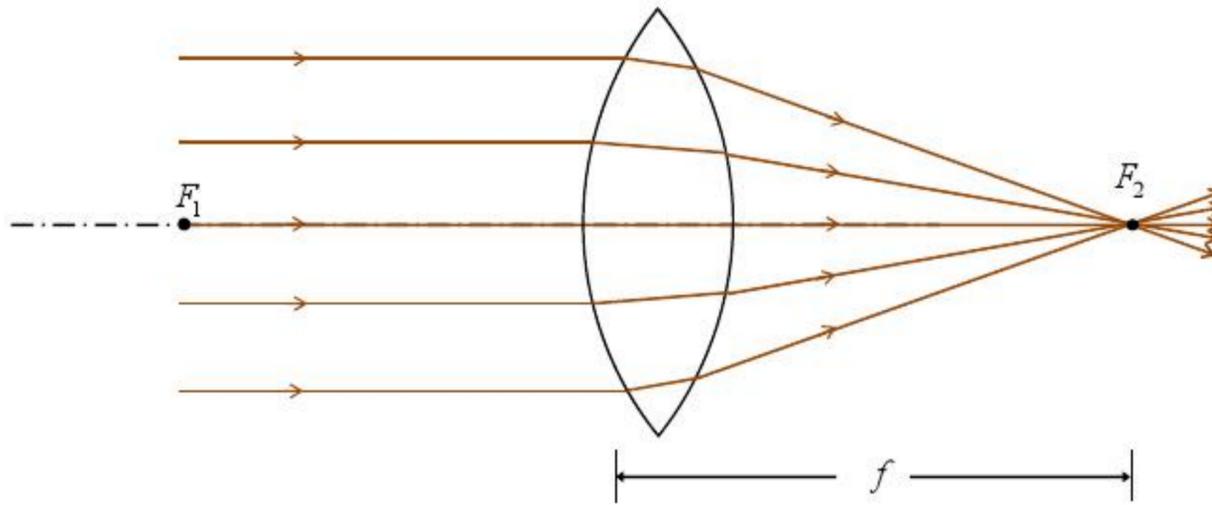


Figura 6.11. Determinación de la posición del foco en una lente convergente.

Haciendo en la ecuación anterior $o \rightarrow \infty$, se tiene para la distancia focal la relación:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R''} \right)$$

Esta es la ecuación que permite calcular la distancia focal en función de los radios de curvatura de la lente y de su índice de refracción. Por otra parte, si comparamos esta ecuación y la anterior, vemos que se cumple la relación:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Finalmente, en la Figura 6.12 se muestra el comportamiento de una lente cuyas dos caras son convexas. Los rayos que llegan paralelos, salen divergentes y dan una imagen *virtual* en F_2 .

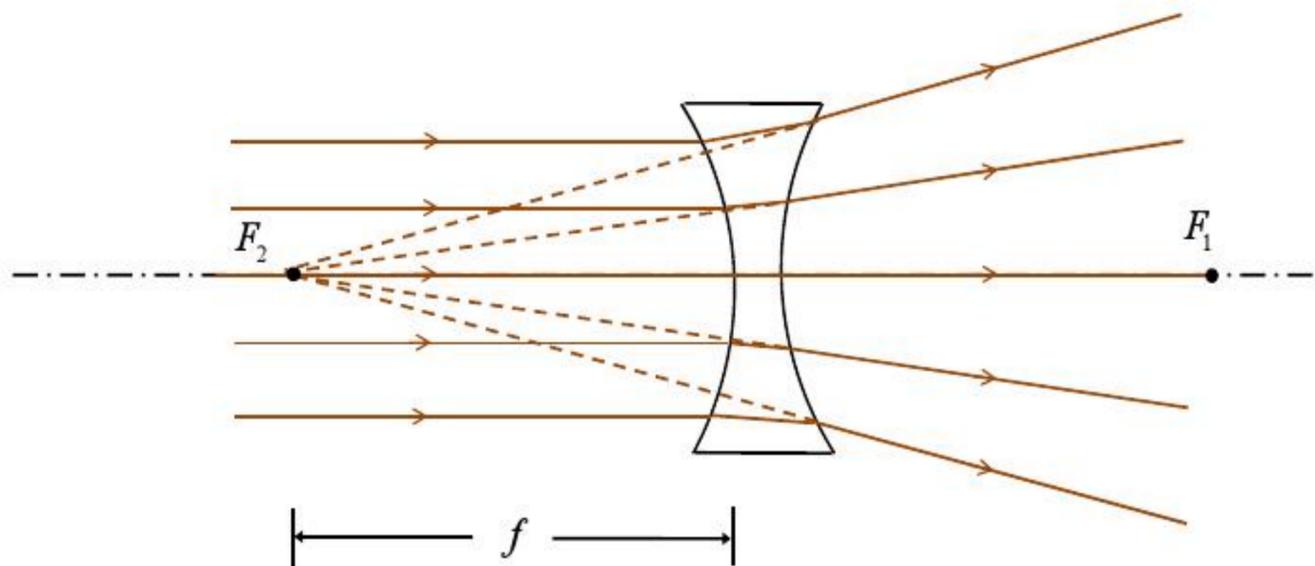


Figura 6.12. Determinación de la posición del foco en una lente divergente.

Observemos que el primer foco, F_1 , se sitúa a la derecha.

Formación de imágenes: Para obtener la imagen que producen las lentes delgadas basta con trazar dos rayos desde el extremo del objeto:

- 1) Un rayo paralelo al eje y que sale cortándolo en la posición del segundo foco F_2 .
- 2) Un rayo que pase por el primer foco, F_1 , y sale paralelo al eje.

También podemos trazar desde el extremo un rayo que pase por el centro de la lente. En la aproximación de lente delgada, éste no se desviará y se unirá a los anteriores para dar el extremo de la imagen formada. Como en los espejos, el cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto nos da el aumento lateral; este valor viene dado en función de las distancias objeto e imagen por la relación:

$$m = \frac{i}{o}$$

si la imagen está invertida este número será negativo. Para ver de forma interactiva este proceso se puede consultar la dirección de Internet:

<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/lentes/ReglasFormacImaLentes.htm>

Cuando los rayos no están próximos al eje, el comportamiento deja de ser paraxial y las imágenes dejan de ser nítidas. Aparecen aberraciones de tipo geométrico: aberración esférica, coma, astigmatismo, etc. También las lentes sufren aberración cromática debido a que los rayos de distintas longitudes de onda se refractan con ángulos diferentes como veremos ahora.

6.2.3. Dispersión: Prismas

Se ha observado que, para la mayoría de los materiales, el índice de refracción n disminuye ligeramente a medida que crece la longitud de onda del rayo incidente λ , de forma equivalente, n aumenta con la frecuencia. Esta dependencia se conoce con el nombre de *dispersión*. Cuando un haz de luz blanca incide con un cierto ángulo en la superficie de un prisma de vidrio, el ángulo de refracción, medido respecto a la normal, es menor para frecuencias en el rango del violeta y va aumentando al desplazarnos hacia el rojo, Figura 6.13.

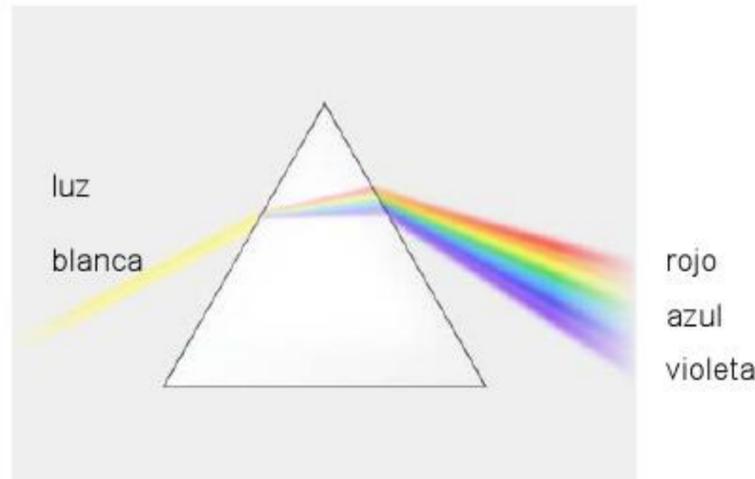


Figura 6.13. Dispersión de la luz blanca al atravesar un prisma de vidrio.

Este fenómeno es también el responsable de la formación del arco iris, debido a la existencia de reflexión y refracción de la luz en las gotas de lluvia. Para ver la explicación propuesta por Descartes, se puede consultar la dirección:

http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/color/arcoIris/ArcoIris_Descartes.htm

6.3 Óptica física

En los experimentos que vamos a analizar en esta sección, las dimensiones de las aperturas o rendijas son comparables a la longitud de onda de la señal. Entonces se hace evidente la naturaleza ondulatoria de la luz ya que sólo mediante consideraciones de este tipo podremos explicar el comportamiento observado. En la Sección 4.5 se definió el concepto de frente de onda que aquí volveremos a utilizar. También nos será útil el denominado *principio de Huygens: Todos los puntos de un frente de ondas se pueden considerar como centros emisores de ondas esféricas secundarias. Transcurrido un cierto tiempo, la nueva posición del frente de ondas será la superficie tangente a esas ondas secundarias.* La intensidad de estas ondas secundarias varía con la dirección: es máxima en la dirección de propagación y disminuye progresivamente hasta hacerse nula en la dirección opuesta.

6.3.1. Interferencia: Experimento de Young

En la sección 4.7 vimos que si dos ondas de la misma frecuencia coinciden en una región, pueden superponerse de forma que su energía se distribuye no uniformemente, dando lugar a máximos, mínimos o valores intermedios.

La demostración de tales efectos de *interferencia* para el caso de luz, fue realizada por primera vez por Thomas Young en 1801. Este hacía llegar luz a una pequeña apertura S_1 practicada en una pantalla

como se muestra en la Figura 6.14; la luz emergente se extiende por difracción y llega a dos pequeñas aperturas, S_2 y S_3 , practicadas en una segunda pantalla; nuevamente las ondas se difractan y dan lugar a dos ondas esféricas secundarias que se propagan hacia la derecha e interfieren en la tercera pantalla.

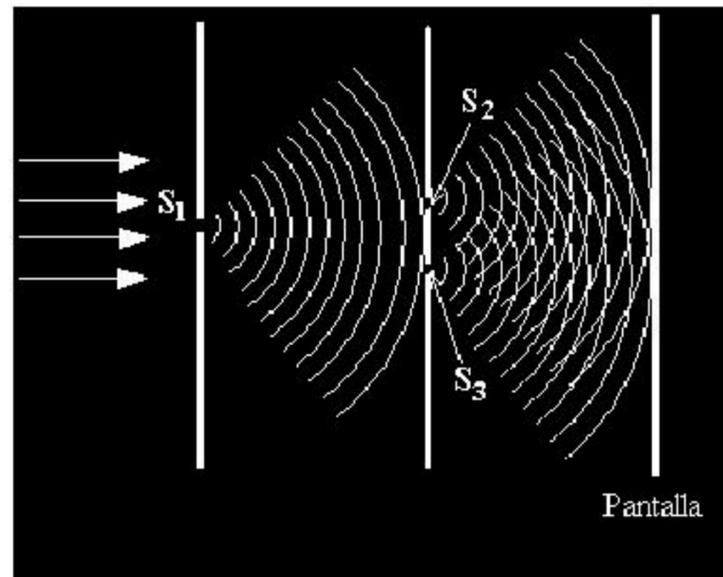


Figura 6.14. Experimento de Young para producir dos ondas esféricas que interfieren en la pantalla.

Vamos a analizar en detalle este experimento, suponiendo que la luz incidente es monocromática. Para ello razonaremos sobre el esquema representado en la Figura 6.15. Por claridad se ha usado esta escala pero en el laboratorio se ha de cumplir que $D \gg d$, siendo D la distancia entre pantallas y d la separación entre aperturas. Supongamos dos rayos que salen de cada una de las aperturas y se cortan en el punto P . El primero recorre la distancia r_1 y el segundo r_2 . Debido a la condición $D \gg d$, ambos rayos son casi paralelos y el segmento S_2b es perpendicular a ellos. Ello implica que el ángulo S_3S_2b es casi igual al ángulo PaO , estando ambos simbolizados por θ en la figura.

Los dos rayos están en fase en las aperturas ya que ambos salieron del mismo frente de ondas. Como los rayos tienen diferente longitud de camino óptico, llegarán a P con una diferencia de fase. El número de longitudes de onda contenidos en S_3b , que es la diferencia de caminos, determina el tipo de interferencia en P .

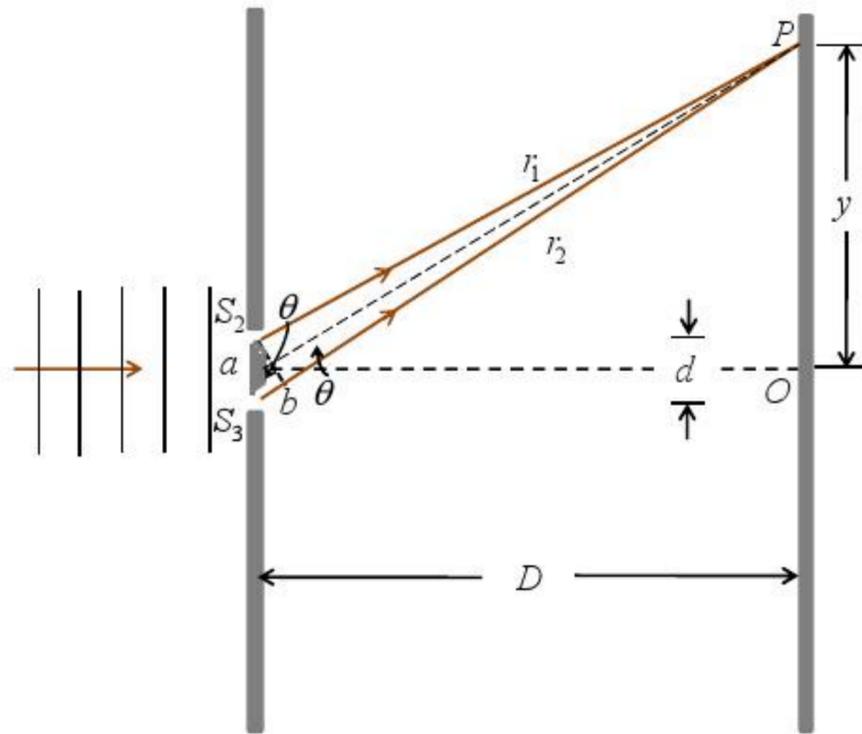


Figura 6.15. Análisis de la formación de interferencias del experimento de Young.

Para tener un máximo en P , la diferencia de caminos $S_3b = d \text{sen} \theta$ debe contener un número entero de longitudes de onda,

$$d \text{sen} \theta = m \lambda \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \text{ (máximos)}$$

ya que así los campos se suman con una diferencia fase $0, 2\pi, 4\pi, \dots$, y por tanto se suman en fase. Notemos que, por simetría, a cada máximo por encima de O le corresponde otro por debajo colocado a la misma distancia.

Análogamente, para observar un mínimo en P se ha de verificar que:

$$d \text{sen} \theta = (m - 1/2) \lambda \quad , \quad m = 1, 2, \dots \text{ (mínimos)}$$

En general, la diferencia de fase δ en un punto P está relacionado con la diferencia de camino óptico por medio de la proporción:

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d \text{sen} \theta}{\lambda}$$

Finalmente, la distancia entre O y las posiciones de máximos ó mínimos, se pueden deducir en función de la distancia entre las dos rendijas y la pantalla, mediante la expresión (Figura 6.15, para θ igual al ángulo correspondiente):

$$\text{tg} \theta = \frac{y}{D}$$

Este experimento fue crucial para demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz. Se han hecho diversas experiencias basadas en el mismo; normalmente se utilizan dos rendijas estrechas en lugar de aperturas, como muestra la Figura 6.16.

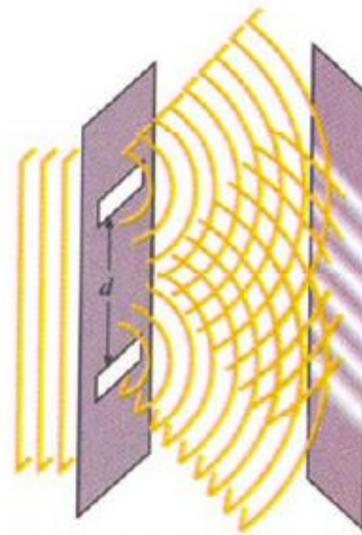


Figura 6.16. Diagrama de interferencias producido por dos rendijas.

Notemos cómo se distribuyen las franjas en zonas de máximo brillo o de oscuridad, de acuerdo con la superposición de ondas en fase o en oposición de fase.

6.3.2. Difracción: Difracción por una rendija

La difracción es un fenómeno característico de las ondas que consiste en la dispersión y curvado de las ondas cuando atraviesan un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a su longitud de onda. La difracción de ondas en una pequeña apertura es consecuencia del principio de Huygens. El primero que lo aplicó para explicar la difracción de ondas luminosas fue Fresnel y por ello se denominó principio de Huygens-Fresnel. Consideremos un frente de ondas que llega a una apertura practicada en una pantalla *B*, como se muestra en la Figura 6.17.

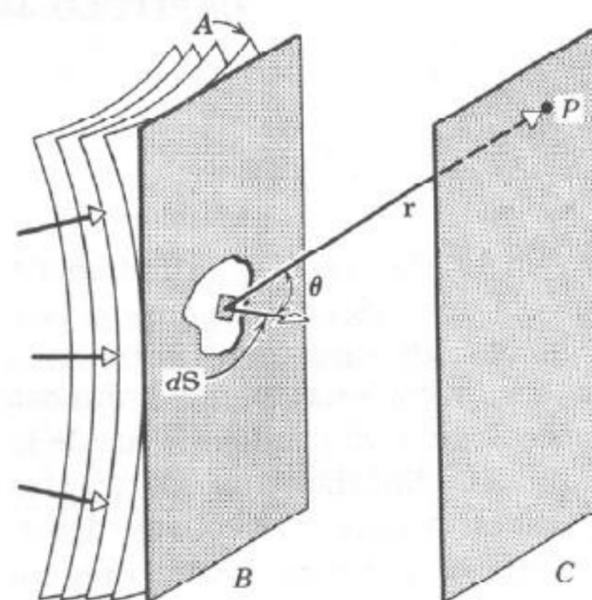


Figura 6.17. Las ondas se difractan en la apertura practicada en *B* e iluminan la pantalla *C*.

Todo punto de ese frente puede considerarse un foco emisor de ondas secundarias esféricas; el hecho de que la luz se curve y penetre en la región donde cabía esperar sombra está relacionado con la obstrucción que sufren las ondas elementales incidentes a ambos lados de los bordes de la apertura. La luz se difracta en la apertura de la pantalla *B* e ilumina la pantalla *C*.

El patrón de intensidad luminosa en *C* puede calcularse dividiendo el frente de ondas en áreas elementales dS cada una de las cuales es un foco emisor de ondas secundarias. La intensidad en un punto arbitrario, *P*, se obtiene superponiendo las contribuciones provenientes de todos los emisores de la apertura. El cálculo de la intensidad es muy complejo en el caso general. Únicamente analizaremos el caso de que el haz llegue de una fuente muy alejada; entonces se puede considerar que los rayos incidentes son paralelos y que la pantalla se encuentra también muy lejos de la apertura. Este caso límite se conoce como *difracción de Fraunhofer*.

Como se ilustra en la Figura 6.18, supongamos que la dirección θ bajo la que llegan los rayos cumple la condición $a \sin \theta = \lambda$: se ve claramente que el rayo difractado justo en el borde superior de la rendija interfiere destructivamente (al estar desfasado en media longitud de onda) con el rayo difractado en la mitad de la rendija; y este rayo a su vez interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior de la rendija.

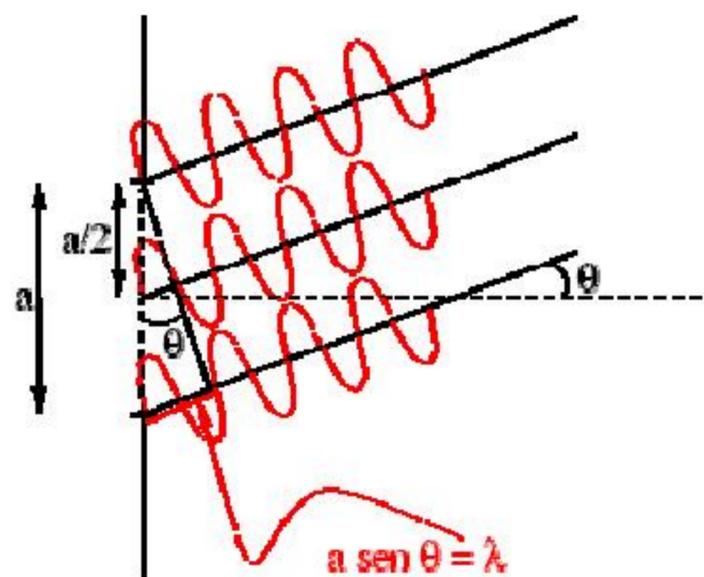


Figura 6.18. Esquema de la pantalla *B* de la Figura 6.17 particularizado para una rendija.

De ello se deduce que en la dirección θ considerada habrá un cero en la intensidad de la luz difractada. Si ahora consideramos otro ángulo θ' que cumpla $a \text{sen}\theta' = 2\lambda$, tendremos un caso similar: el rayo difractado en el borde superior interfiere destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; este segundo rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en la mitad de la rendija; éste a su vez, destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; y finalmente, este último rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior. Generalizando, la condición de intensidad cero para la difracción de luz monocromática por una rendija de anchura a es

$$a \text{sen}\theta = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3 \dots (\text{mínimos})$$

Un caso especial es el ángulo $\theta = 0$: el análisis precedente no sirve puesto que no hay ningún desfase entre los rayos que salen de cada foco emisor dentro de la anchura de la rendija. Por ello, para $\theta = 0$ habrá un máximo en la intensidad del patrón de interferencia que se forme en el punto de observación; este valor se llama máximo central.

La Figura 6.19.(a) muestra el diagrama de difracción de una sola rendija observado sobre una pantalla muy alejada. En la Figura 6.19.(b) se representa la intensidad luminosa en función del $\text{sen}\theta$, correspondiente a dicho diagrama.

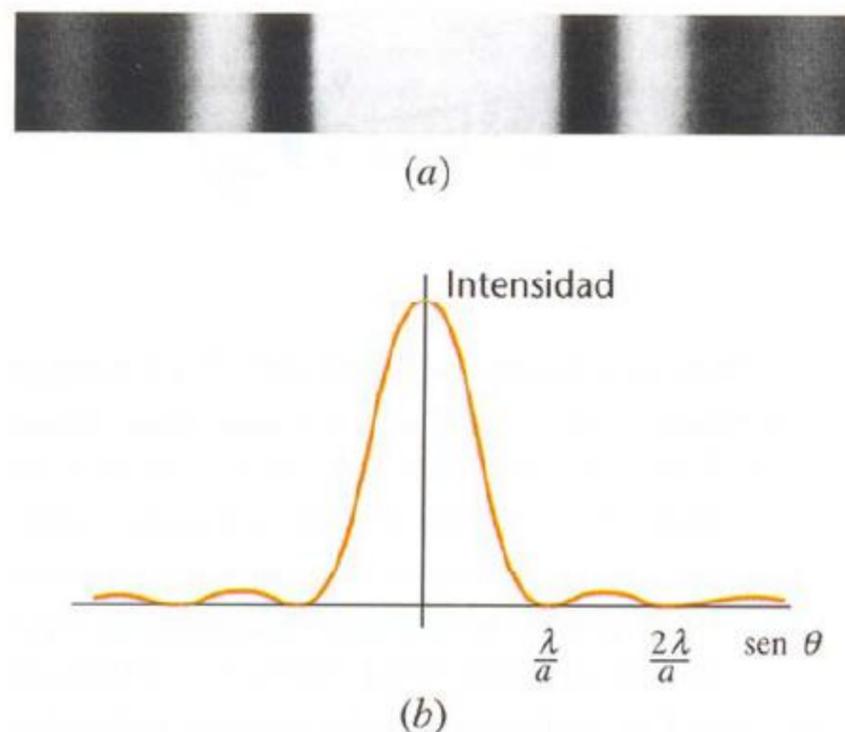


Figura 6.19. (a) Diagrama de difracción producido por una rendija. (b) Gráfica de la intensidad.

6.3.3. Polarización

En la Figura 6.1 se representa un diagrama de la distribución de campos \vec{E} y \vec{B} en una onda electromagnética para ilustrar que los campos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Este es un tipo particular de onda electromagnética como veremos a continuación.

En un punto determinado del espacio, el campo eléctrico asociado a la onda tiene dos componentes vectoriales perpendiculares (transversales) a la dirección de propagación. Las amplitudes de las dos componentes vectoriales varían con el tiempo, y pueden estar o no en fase. Cuando están en fase se dice que la onda está linealmente polarizada (Figura 6.20a). En el caso de que las amplitudes de las dos componentes sean iguales y estén desfasadas $\frac{\pi}{2}$ se dice que la onda está polarizada circularmente

(Figura 6.20b). En el caso general de desfases y amplitudes diferentes se dice que la onda tiene polarización elíptica (Figura 6.20c).

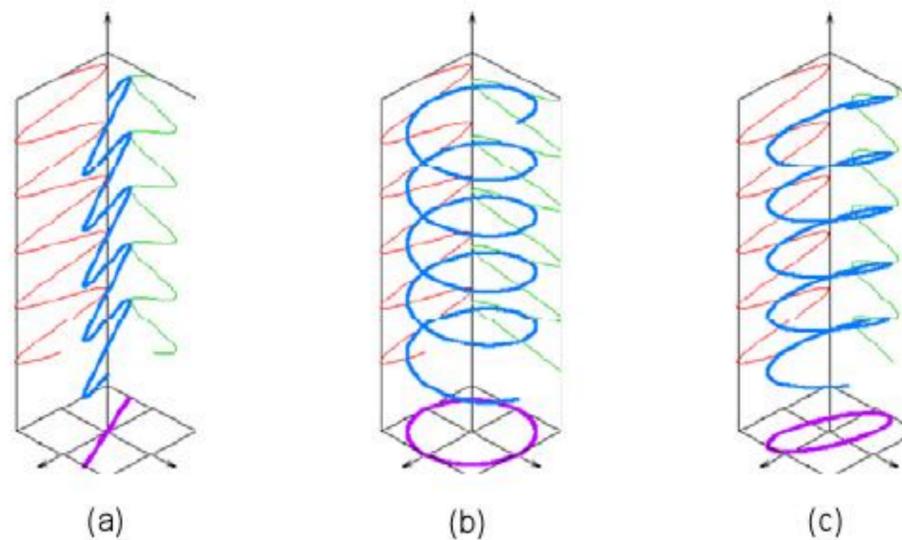


Figura 6.20. Polarización de una onda electromagnética. (a) Lineal; (b) Circular; (c) Elíptica.

Si comparamos el diagrama de la figura 6.1 con estos tres casos, concluimos que corresponde a la polarización lineal.

Las emisoras de radio y TV transmiten con portadoras que son ondas linealmente polarizadas; las fuentes usuales de luz visible difieren de las fuentes de radio y microondas en que los radiadores elementales, esto es, los átomos y moléculas, obran de forma independiente. La luz que se propaga en una dirección dada consiste en trenes de ondas cuyos planos están orientados al azar. Esta luz, si bien sigue siendo transversal, es no polarizada.

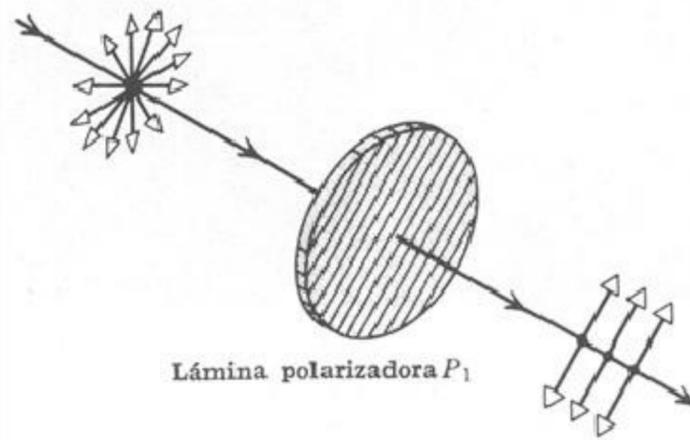


Figura 6.21. Lámina polarizadora: al atravesarla una luz no polarizada, la onda saliente sólo contiene aquellas ondas que vibran en planos paralelos a la orientación de las ranuras.

En el laboratorio podemos polarizarla por medio de una lámina polarizadora como la mostrada en la Figura 6.21.

6.4. Ondas sonoras: Propiedades

Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales, es decir, las partículas materiales que transmiten esas ondas vibran en la misma dirección que la de propagación. Aunque existe un amplio margen de frecuencias en las que se pueden generar ondas mecánicas de tipo longitudinal, las ondas sonoras (o audibles) se restringen al intervalo en el que pueden estimular el oído humano; esto ocurre entre 15 Hz y 20 kHz. Para frecuencias menores la onda se llama *infrasónica* y para frecuencias mayores decimos que la onda es *ultrasónica*. Las ondas sonoras llegan al oído transmitidas normalmente a través del aire; sin embargo también pueden propagarse en medios sólidos y líquidos.

Las ondas sonoras son producidas por cuerdas que vibran (violín, guitarra, cuerdas vocales), por columnas de aire en vibración (trompeta, órgano), por placas y membranas (xilófono, tambor, altavoz), etc.

Como ya hemos visto en la Unidad 4, una onda sonora se caracteriza por su *frecuencia* (asociada al concepto de tono) y la *amplitud* de su oscilación (asociada a su intensidad o flujo de energía transportada en la unidad de tiempo).

Veamos con un poco más de detalle otra cualidad de los sonidos: el *timbre*. Si, por ejemplo, se toca un ‘la’ en un violín, un piano y un diapasón, con la misma intensidad en todos los casos, los sonidos son idénticos en frecuencia y amplitud, pero muy diferentes en timbre. De los tres instrumentos, el que produce el sonido más simple es el diapasón, que estará formado por vibraciones de 440 Hz. La componente principal de la nota producida por el piano o el violín también tiene una frecuencia de 440 Hz; sin embargo, esas notas contienen otras componentes de frecuencias que son múltiplos exactos de 440 Hz, los llamados *armónicos* de 880 Hz, 1.320 Hz ó 1.760 Hz. Las intensidades de los distintos armónicos determinan el timbre de la nota y le dan al instrumento su sonido característico.

6.4.1. Ondas sonoras viajeras y velocidad del sonido

Las ondas sonoras, si no están limitadas por paredes, se propagan en todas direcciones como una onda esférica cuyo centro es la fuente emisora. Resulta más sencillo, sin embargo, analizar su propagación unidireccional y a tal fin veremos primero la transmisión de ondas en un tubo.

La Figura 6.22 muestra un émbolo en un extremo de un tubo largo, lleno de un medio compresible. Las líneas verticales representan capas de moléculas; éstas se encuentran equiespaciadas en las zonas a las que no ha llegado la perturbación (medio en reposo).

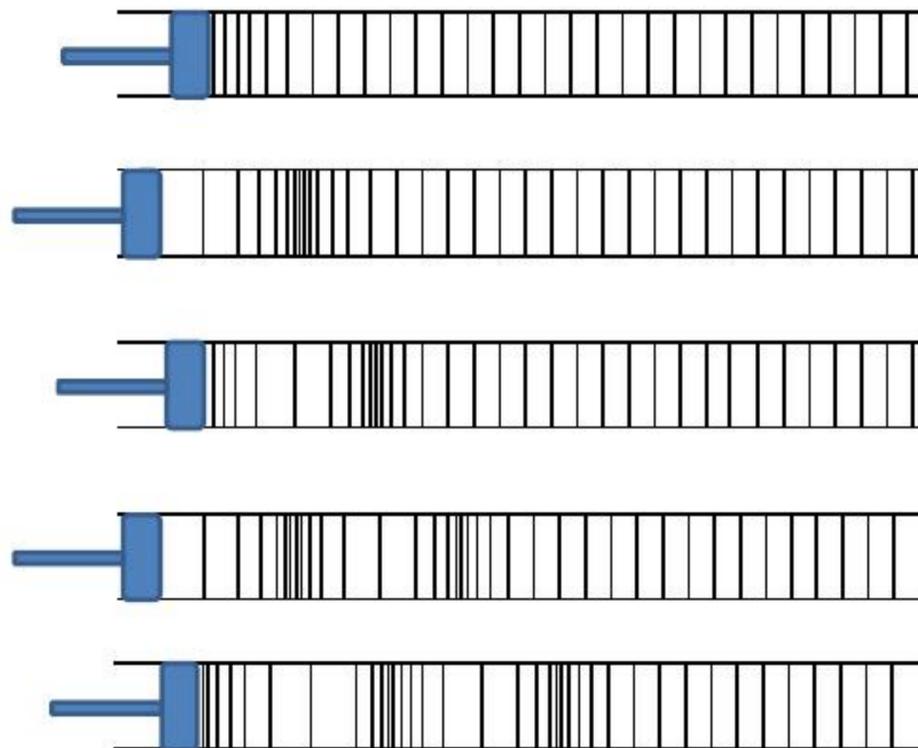


Figura 6.22. Ondas sonoras producidas en un tubo por un émbolo oscilante.

Si empujamos el pistón hacia adelante, se comprimen las capas de fluido más próximas a él. Esas capas comprimirán a su vez capas contiguas transmitiendo un impulso de compresión a lo largo del tubo. Si a continuación sacamos el émbolo rápidamente, se producirá una rarefacción en las capas próximas que se transmitirá por el tubo igual que la compresión anterior. Si el émbolo prosigue su vaivén, avanzará por el tubo un tren continuo de compresiones y rarefacciones, como se ilustra en los sucesivos diagramas de la Figura 6.22.

La relación entre el cambio de presión, ΔP , en un cuerpo y la fracción de cambio de volumen resultante, $-\Delta V/V$, se llama módulo de elasticidad volumétrico B del cuerpo:

$$B = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

Este coeficiente es positivo porque un aumento de presión produce una disminución de volumen. En los sólidos el coeficiente B es el módulo de Young. En función de B , la velocidad de la onda longitudinal, v , en el medio es:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

donde ρ_0 es la densidad del medio en reposo. En los gases una expresión equivalente muy utilizada es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Siendo γ el coeficiente de dilatación adiabática, R la constante universal de los gases, T la temperatura en K y M la masa molar del gas. Los valores típicos para la atmósfera estándar a nivel del mar son los siguientes:

$$\gamma = 1,4 \quad R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K}) = 8.314 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/(\text{mol}\cdot\text{K}\cdot\text{s}^2)$$

$$T = 293,15 \text{ K} (\Leftrightarrow 20 \text{ }^\circ\text{C}) \quad M = 29 \text{ g/mol (promedio para el aire)}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene una velocidad del sonido $v = 343 \text{ m/s}$.

Consideremos nuevamente el tren de ondas de la Figura 6.22. Conforme avanza la onda, una partícula de fluido oscila a la derecha o a la izquierda de su posición de equilibrio, según el eje x de propagación. Por conveniencia, *representamos la elongación* de cualquier partícula con respecto a su posición de equilibrio *por la letra y*. Así, la ecuación de una onda longitudinal que avanza hacia la derecha es de la forma (Unidad 4, Sección 4.4.2):

$$y = f(x - vt)$$

Y para el caso particular de una oscilación armónica simple se tiene:

$$y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

que también podemos expresar en función del número de onda y la frecuencia angular:

$$y = A \cos(kx - \omega t)$$

Es conveniente relacionar las elongaciones con las variaciones de presión para poner la ecuación de onda en función de ésta. Teniendo en cuenta que:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V}$$

Si representamos por P el cambio con respecto a la presión no perturbada P_0 , es decir, P sustituye a ΔP , de forma que ahora escribimos:

$$P = -B \frac{\Delta V}{V}$$

Si una capa de fluido a la presión P_0 tiene una longitud Δx y una sección transversal S , su volumen es $V = S\Delta x$. Cuando cambia la presión, su volumen cambiará a $S\Delta y$, siendo Δy lo que cambia la longitud de la capa durante la compresión o la rarefacción. Por tanto,

$$P = -B \frac{\Delta V}{V} = -B \frac{S\Delta y}{S\Delta x}$$

A medida que $\Delta x \rightarrow 0$, de modo que la capa tiende a un grosor infinitesimal, queda:

$$P = -B \frac{dy}{dx}$$

Teniendo en cuenta que $y = A \cos(kx - \omega t)$, resulta:

$$P = BkA \sin(kx - \omega t)$$

Observamos que la variación de la presión es también armónica simple. Teniendo en cuenta que $v = \sqrt{B/\rho_0}$, podemos sustituir B para dejar P en función de la velocidad v :

$$P = \{k\rho_0 v^2 A\} \sin(kx - \omega t)$$

Recordemos que P representa el cambio a partir de la presión normal P_0 . Por ejemplo, si P_0 fuera la presión atmosférica, P representaría la presión manométrica. El término entre llaves es el cambio máximo de presión y se llama *amplitud de presión*.

En resumen, una onda sonora puede representarse mediante una onda de elongaciones o como una onda de presiones. Si la primera es una función coseno, la segunda debe ser una función seno, es decir, hay un desfase de 90° entre una y otra.

6.4.2. Energía e intensidad de las ondas sonoras

Este punto se ha desarrollado para ondas mecánicas en la Sección 4.5 de la Unidad 4. Partiendo de una fuente sonora puntual que transmite ondas esféricas tales que la fuente se sitúa en su centro, recordemos que se llama *intensidad* de una onda sonora en un punto a *la cantidad de energía de la onda por unidad de tiempo, que atraviesa perpendicularmente la unidad de superficie colocada en dicho punto.*

$$I = \frac{\text{energía}}{\text{superficie} \cdot \text{tiempo}} \quad (\text{W/m}^2)$$

Debido a la gran extensión del intervalo de audibilidad, para expresar intensidades sonoras se emplea una escala cuyas divisiones son potencias de diez y cuya unidad de medida es el decibelio (dB). La conversión entre intensidad y decibelios sigue esta ecuación:

$$S = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

donde $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ es el nivel mínimo para que sea audible y, por tanto, corresponde a un nivel de 0 decibelios. Ello significa que una intensidad acústica de 10 decibelios corresponde a una energía diez veces mayor que una intensidad de cero decibelios; una intensidad de 20 dB representa una energía 100 veces mayor que la que corresponde a 0 decibelios y así sucesivamente.

Se ha establecido que el *umbral del dolor* corresponde a una intensidad de 1 W/m^2 ó 120 dB. Cada país establece normativas para que no se superen ciertos límites en las casas, fábricas o cualquier instalación, de forma que no pueda molestar a los vecinos.

6.4.3. Interferencia de las ondas sonoras. Ondas estacionarias. Modos normales y resonancia

Véanse las Secciones 4.7 y 4.8 de la Unidad 4.

6.5. Sistemas vibratorios y fuentes de sonido

Si se pulsa una cuerda de longitud ℓ de un instrumento, se originan vibraciones transversales de dicha cuerda que al reflejarse en los extremos forman un sistema de ondas estacionarias. La cuerda vibra en sus frecuencias naturales:

$$f = \frac{n}{2\ell}v = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\eta}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

siendo F = tensión de la cuerda en N, y η = masa por unidad de longitud en kg/m. Estas vibraciones dan lugar a ondas longitudinales en el aire que las transmite a nuestros oídos como sonidos musicales.

La frecuencia mínima, $n = 1$, $\rightarrow f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{F}{\eta}}$ se llama *frecuencia fundamental* y es lo que caracteriza el tono de las notas musicales; las restantes, $n > 1$, se conocen como *sobretonos* y conforman el timbre de cada instrumento.

Otro tipo de fuente es el órgano, el ejemplo más sencillo de instrumento que produce sonidos por columnas de aire vibratorias. Si un extremo de uno de sus tubos está abierto y se dirige una corriente de aire contra un borde, se formarán ondas longitudinales en el tubo. La columna de aire resonará para sus frecuencias naturales:

$$f = \frac{n}{2\ell}v, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En esta expresión v es la velocidad de las ondas longitudinales en la columna y n es el número de semilongitudes de onda contenidas en la longitud ℓ de la columna. Al igual que sucede en la cuerda, al mismo tiempo que la frecuencia fundamental se excitarán los correspondientes sobretonos.

En un tubo abierto, la frecuencia fundamental corresponde a un antinodo de elongación en cada extremo y a un nodo de elongación en el centro como se muestra en la Figura 6.23.

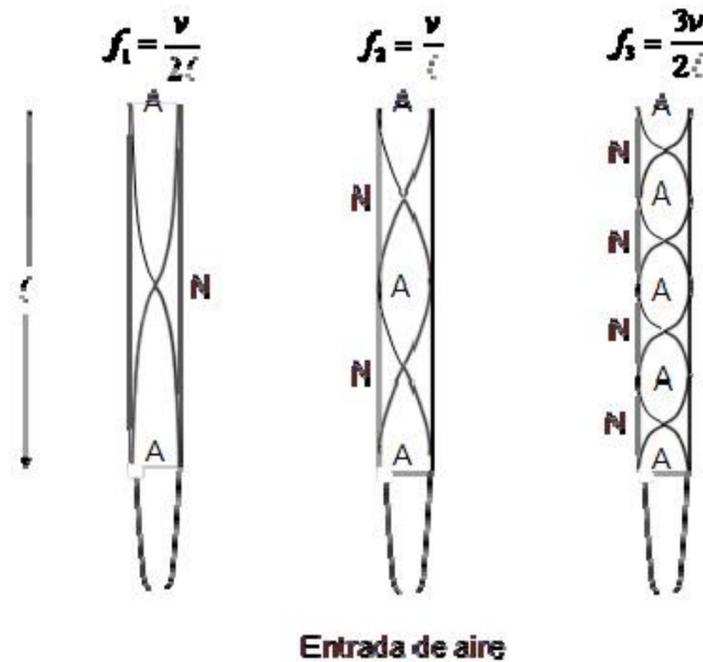


Figura 6.23. Modos de vibración en un tubo de órgano, $n=1,2,3$. A=antinodo, N=nodo.

También se representan en esa figura los modos $n = 2$, y 3 .

Las placas y las membranas estiradas en vibración, también dan lugar a ondas sonoras. Por ejemplo, si se da un golpe en la membrana de un tambor, a partir del punto en que se golpea sale un impulso bidimensional que se refleja en las bordes de la membrana. Si el golpeo se repite periódicamente, se forman en ella trenes de ondas continuas que al reflejarse en vaivén forman un patrón de ondas estacionarias. También en este caso la frecuencia más baja se llama tono fundamental y los múltiplos sobretonos. Estas vibraciones excitan ondas sonoras en su entorno que las hacen audibles.



Figura 6.24. Modos de vibración en una placa metálica cuadrada.

La Figura 6.24 muestra dos modos de vibración de una placa metálica excitada con un altavoz que emite sonidos de frecuencia variable.

Al ser vibraciones bidimensionales los nodos de la placa son líneas en lugar de puntos, ya que como el perímetro de la placa está fijo, debe ser una línea nodal. La solución de este problema es bastante compleja y no la abordaremos aquí. En la dirección web:

<http://euler.us.es/~plopez/vibracion-de-una-membrana-circular.htm>

se pueden visualizar distintos modos de vibración para una membrana circular.

6.6. Efecto Doppler

Cuando un observador está acercándose a una fuente sonora en reposo, el sonido que se percibe es más agudo (mayor frecuencia) que cuando está quieto. Si se aleja de la fuente percibe un tono más grave (menor frecuencia). Se obtienen resultados similares cuando es la fuente la que se mueve mientras el observador permanece en reposo (por ejemplo, en la estación de trenes cuando pasa una locomotora silbando).

En 1842, Christian Doppler constató en una memoria el hecho de que tanto el color de un cuerpo luminoso como el tono de un cuerpo sonoro deben cambiar con el movimiento relativo del cuerpo y del observador. Por ello se denomina *efecto Doppler* y se aplica en general a todo tipo de ondas.

Vamos a examinar el caso de un observador que se mueve hacia una fuente estacionaria con velocidad v_0 . Debido a ello, recibe más ondas por unidad de tiempo que si permaneciera quieto. Las ondas adicionales recibidas en la unidad de tiempo son las que ocupa la distancia avanzada en ese intervalo, es decir, una distancia igual a su velocidad v_0 . Si λ es la longitud de onda, habrá $\frac{v_0}{\lambda}$ ondas

adicionales. Si v es la velocidad de la onda y f su frecuencia, se tiene $\lambda = \frac{v}{f}$. Entonces, la frecuencia

f' que percibe el observador es f más el aumento $f(v_0/v)$ ocasionado por el movimiento del observador,

$$f' = f \cdot \left(1 + \frac{v_0}{v}\right) = f \cdot \left(\frac{v + v_0}{v}\right)$$

Análogamente, para un observador que se aleja de la fuente obtenemos:

$$f' = f \cdot \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) = f \cdot \left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

Cuando la fuente se mueve hacia el observador en reposo, el efecto es un acortamiento de la longitud de onda, porque la fuente va siguiendo las ondas. Si la velocidad de la fuente es v_s , en cada vibración

avanzará una distancia v_s / f y la longitud de onda se acorta en esa cantidad. En consecuencia, la longitud de onda que percibe el observador no es $\lambda = \frac{v}{f}$ sino $\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_s}{f}$. Ello implica que la frecuencia del sonido que percibe aumenta a valor:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s) / f} = f \cdot \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$$

Si la fente se aleja del observador, razonando de forma análoga se llega a

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v + v_s) / f} = f \cdot \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$$

es decir, la frecuencia se hace más baja.

Este efecto tiene muchísimas aplicaciones tanto en la vida cotidiana como en la investigación e interpretación de muchos fenómenos.

avanzará una distancia v_s / f y la longitud de onda se acorta en esa cantidad. En consecuencia, la longitud de onda que percibe el observador no es $\lambda = \frac{v}{f}$ sino $\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_s}{f}$. Ello implica que la frecuencia del sonido que percibe aumenta a valor:

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s) / f} = f \cdot \left(\frac{v}{v - v_s} \right)$$

Si la fente se aleja del observador, razonando de forma análoga se llega a

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v + v_s) / f} = f \cdot \left(\frac{v}{v + v_s} \right)$$

es decir, la frecuencia se hace más baja.

Este efecto tiene muchísimas aplicaciones tanto en la vida cotidiana como en la investigación e interpretación de muchos fenómenos.

El Libro **Lecciones de Física General**, se imprimió en la Editorial Universitaria, UNAN-León. En mes de Julio de 2013.

VAMOS HACIENDO HISTORIA

La Universidad de Alcalá (UAH) y Universidad Complutense (UCM) han venido cooperando desde 1989 con la UNAN-León y el Ministerio de Educación de Nicaragua (MINED) para mejorar la calidad de la enseñanza de las ciencias experimentales, primero en la UNAN-León y otras universidades y posteriormente en la Enseñanza Media de Nicaragua, mediante cursos de formación y profesionalización de docentes empíricos sin titulación, desarrollados en la UNAN-León, reconocidos por el MINED con una titulación de Profesor de Educación Media (PEM), habiéndose llevado a cabo tres ediciones hasta la actualidad.

En el año 2009; con mejores niveles de organización y sobre la base de una acción preparatoria y un diagnóstico de la situación de la enseñanza de las Ciencias Naturales en la Región del Golfo de Fonseca con indicadores similares en los tres países nace el primer proyecto regional "FECINCA", el cual se ha desarrollado en el período 2009-2013.

Entre los logros obtenidos en el marco de este proyecto se pueden mencionar:

- a) La formación de 70 profesores de la Región del Golfo de Fonseca, que han completado el plan de estudios de formación de Profesorado de Enseñanza Media (PEM en CCNN).
- b) La realización de 31 trabajos de investigación dirigidos a mejorar la enseñanza en las aulas de clase y el aspecto ambiental de las comunidades.
- c) Conformación y funcionamiento de un equipo regional con 21 docentes de tres universidades centroamericanas, UPNFM, UES y UNAN.
- d) La institucionalización del programa. El programa se inserta en los planes estratégicos de las universidades centroamericanas participantes y recibe apoyo en la coordinación de la red GIRA.
- e) La creación de un laboratorio de ciencias experimentales en Somotillo y Nacaome; (Infraestructura, mobiliario, equipos, bibliografía, medios audiovisuales) y fortalecimiento de los laboratorio de ciencias naturales de la UES.
- f) Apoyo a la infraestructura del CUR Somotillo de la UNAN-León, con la construcción de una fosa séptica en esta sede del proyecto. Creación de un taller de metal y madera para el diseño de equipos de bajo costo destinados a los institutos de los municipios del norte de Chinandega, Nicaragua.
- g) Desarrollo a nivel centroamericano de conferencias, investigaciones y elaboración de manuales de prácticas de laboratorio por becarios de la UAH y UCM.
- h) Desarrollo del Diplomado en Formación de expertos en la enseñanza experimental de las Ciencias Naturales.
- i) Desarrollo de líneas de investigación e innovación científica tanto a nivel de alumnos como de docentes.
- j) Creación de Biblioteca en Nacaome y San Miguel con Bibliografía básica y especializada.
- k) Fomento del uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación para la enseñanza de las Ciencias Naturales.

En todas las acciones desarrolladas se han considerando los principios horizontales que deben estar presentes en todo programa social: Respeto a los derechos humanos, al género, a la diversidad cultural y étnica y al medio ambiente.

Seguiremos avanzando siempre unidos en un mismo esfuerzo que es alcanzar mejores niveles de vida para los centroamericanos.

Equipo de Coordinación Regional



ISBN 978-99924-28-34-4



9 789992 428344